حساب السرعة عند نقطة معينة

يكفي استعمال معادلتي السرعة، حيث تحدد المركبتين v_x و v_z وحساب $v = \sqrt{v_x^2 + v_z^2}$ انطلاقا من معرفة اللحظة التي نريد عندها حساب السرعة.

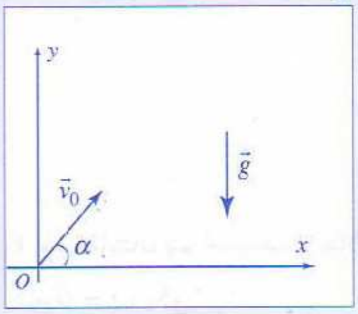
حساب قمة المسار

عند قمة المسار يكون $v_z = 0$ و v_x دائما ثابتة : $v_x = v_0 . \cos\alpha$

نستخرج اللحظة t_S لوصول المتحرك إلى قمة المسار من معادلة السرعة $v_z(t)$ بتعويض v_z بصفر، وبتعويض t_S في المعادلتين الزمنيتين، نحصل على الإحداثيين $x(t_S)$ و $z(t_S)$.

تمرين 1 كرة الكولف

يقذف لاعب كرة الكولف بسرعة متجهتها $\vec{v}_0$ تكون زاوية $\alpha = 30°$ مع المستوى الأفقي.



نهمل جميع الاحتكاكات ونمائل كرة الكولف بنقطة مادية كتلتها m.

نمعلم موضع الكرة بالإحداثيين x و y في المعلم (Ox,Oy) ، حيث Ox محور أفقي و Oy محور رأسي، كما يبين الشكل جانبه.

عند اللحظة $t=0$، توجد الكرة عند النقطة O أصل المعلم (Ox,Oy).

1 - أثبت في المعلم (Ox,Oy) المعادلتين الزمنيتين $x(t)$ و $y(t)$ لحركة الكرة.

2 - استنتج معادلة مسار الكرة.

3 - يريد اللاعب إرسال الكرة إلى الثقب الذي يبعد عن نقطة الارسال O بالمسافة $x_P = 425m$ ؛ حدد قيمة السرعة v_0 ،التي يجب أن يقذف بها اللاعب الكرة تحت الزاوية α لتسقر في الثقب. نعطي : $g = 10m.s^{-2}$

حل

1 - إثبات المعادلتين الزمنيتين

نهمل الاحتكاكات، ونعتبر أن الكرة تخضع أثناء حركتها، لوزنها فقط $\vec{P} = m\vec{g}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة، في المرجع الأرضي، نكتب :

$$m\vec{g} = m.\vec{a} \quad \text{أي أن :} \quad \vec{a} = \vec{g} \quad (1)$$

الشروط البدئية للحركة :

عند $t = 0$ لدينا : $\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix}$ و $\vec{v}_0\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 . \cos\alpha \\ v_{oy} = v_0 . \sin\alpha \end{vmatrix}$

بإسقاط العلاقة (1) على المحورين Ox و Oy، نحصل على :

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = -g \end{vmatrix}$$

بما أن : $\begin{vmatrix} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} \end{vmatrix}$ ، نحصل بالتكامل، مع اعتبار الشروط البدئية على :

$$\vec{v}\begin{cases} v_x = v_0.\cos\alpha \\ v_y = -gt + v_0\sin\alpha \end{cases}$$

وبما أن $\begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} \end{cases}$ ، نحصل بالتكامل مع اعتبار الشروط البدئية على :

$$\overrightarrow{OM}\begin{cases} x = (v_0\cos\alpha).t \\ y = -\dfrac{1}{2}gt^2 + (v_0.\sin\alpha).t \end{cases}$$ وهما المعادلتان الزمنيتان للحركة.

2 - استنتاج معادلة المسار

نستنتج معادلة المسار بتركيب المعادلتين $x(t)$ و $y(t)$ عن طريق إقصاء الزمن t :

لدينا : $x = (v_0\cos\alpha).t$ ومنه : $t = \dfrac{x}{v_0.\cos\alpha}$

نعوض t بتعبيرها في $y(t)$، فنحصل على : $y = -\dfrac{1}{2}g.\dfrac{x^2}{v_0^2.\cos^2\alpha}. + x.\tan\alpha$

3 - تحديد السرعة v_0 لتصل الكرة إلى الثقب ذي الإحداثي x_P .

لتدخل الكرة إلى الثقب، يجب أن يكون إحداثياها هما $x = x_P$ و $y = 0$ ؛ إذن، حسب معادلة المسار :

$-\dfrac{1}{2}g.\dfrac{x_P^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + x_P.\tan\alpha = 0$ ومنه : $v_0^2 = \dfrac{g.x_P}{2.\cos^2\alpha\ \tan\alpha} = \dfrac{g.x_P}{2.\sin\alpha.\cos\alpha}$

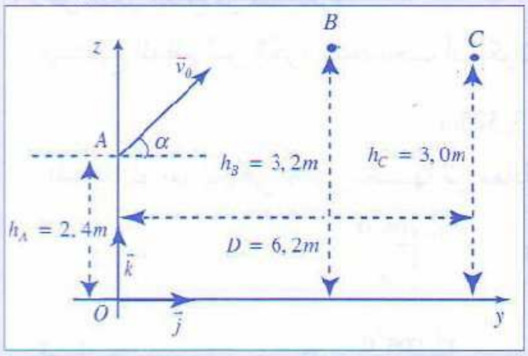
وبما أن $2\sin\alpha.\cos\alpha = \sin 2\alpha$ نحصل على : $v_0^2 = \dfrac{g.x_P}{\sin 2\alpha}$

إذن : $v_0 = \sqrt{\dfrac{g.x_P}{\sin 2\alpha}} = \sqrt{\dfrac{10.425}{\sin 60°}} \approx 70m.s^{-1}$

تمرين موضوعاتي 2 كرة السلة

يهدف هذا التمرين إلى دراسة حركة مركز قصور كرة السلة تم إرسالها نحو دائرة السلة من طرف لاعب مهاجم.

نهمل قوة الاحتكاك التي يطبقها الهواء على الكرة. يرسل المهاجم الكرة ،عند $t = 0$ ،عندما يكون مركز قصورها في النقطة A المبينة على الشكل جانبه.



تمثل السرعة البدئية لمركز القصور G للكرة بالمتجهة $\vec{v}_0$ في المستوى $(O,\vec{j},\vec{k})$.

تُكَوِّن متجهة السرعة $\vec{v}_0$ الزاوية α مع المستوى الأفقي المار من A.

1 - أثبت المعادلات الزمنية لحركة G. استنتج معادلة المسار.

2 - احسب القيمة التي يجب أن تأخذها السرعة $\vec{v}_0$ لتمر الكرة، بالضبط من المركز C لدائرة السلة، (استعمل المعطيات الواردة في الشكل جانبه).

3 - يقفز مدافع يتموضع بين المهاجم والسلة، رأسيا، ليصد الكرة، حيث تصل أصابع يده إلى نقطة B ارتفاعها $h_B = 3,2m$

احسب المسافة الأفقية القصوى الفاصلة بين المهاجم والمدافع ليتمكن هذا الأخير من صد الكرة.

نعطي : قطر الكرة $d = 25cm$ ؛ $\alpha = 40°$ ؛ $g = 9,80m.s^{-2}$

حـل

1 - معادلة المسار

تخضع الكرة أثناء حركتها، في المرجع الأرضي، إلى وزنها فقط $\vec{P} = m.\vec{g}$.

نهمل قوة الاحتكاك المطبقة من طرف الهواء على الكرة.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة نكتب :

$m\vec{g} = m.\vec{a}_G$ ومنه : $\vec{a}_G = \vec{g}$ *(1)* مع $\vec{a}_G$ تسارع مركز القصور G للكرة.

الشروط البدئية للحركة :

$$\overrightarrow{OG}_0 \begin{vmatrix} y_0 = 0 \\ z_0 = h_A \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_{0y} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin\alpha \end{vmatrix}$$

بإسقاط العلاقة *(1)* على المحورين Oy وOz نحصل على :

$$\vec{a}_G \begin{vmatrix} a_y = 0 \\ a_z = -g \end{vmatrix} \Longrightarrow \vec{v}_G \begin{vmatrix} v_y = cte = v_0 .\cos\alpha \\ v_z = -gt + cte = -gt + v_0 \sin\alpha \end{vmatrix} \Longrightarrow \overrightarrow{OG} \begin{vmatrix} y = (v_0 \cos\alpha).t \\ z = -\frac{1}{2}.g.t^2 + (v_0 \sin\alpha.)t + h_A \end{vmatrix}$$

بإقصاء t بين العلاقتين الأخيرتين نحصل على معادلة المسار

$$z = -\frac{1}{2} g.\frac{y^2}{v_0^2.\cos^2\alpha} + y.\tan\alpha + h_A$$

2 - قيمة v_0.

ليتم تسجيل الإصابة يجب أن يكون : $z = h_C = 3,0m$ و $y = D = 6,2m$

نعوض في معادلة المسار لتحديد قيمة السرعة v_0 في هذه الشروط

إذن :

$$v_0 = \sqrt{\frac{-\frac{1}{2} g.\frac{y^2}{\cos^2\alpha}}{z - y.\tan\alpha - h_A}} = \sqrt{\frac{\frac{-0,5.9,8.(6,2)^2}{\cos^2 40°}}{3,0 - 6,2.\tan 40° - 2,4}} = 8,4m.s^{-1}$$

3 - هل يتمكن المدافع من صد الكرة ؟

ليستطيع المدافع لمس الكرة بيده، يجب أن يكون أرتوب مركز قصورها هو :

$$z = h_B + \frac{d}{2} = 3,2 + \frac{0,25}{2} = 3,325m$$

المسافة الموافقة لـ z هي y التي نحسبها من معادلة المسار التالية :

$$y^2 = \frac{v_0^2.\cos^2\alpha.\tan\alpha}{\frac{1}{2}g}.y + (h_A - z).\frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{\frac{1}{2}.g}$$

أي أن :

$$y^2 - \frac{v_0^2.\cos^2\alpha.\tan\alpha}{\frac{1}{2}g}.y - (h_A - z).\frac{v_0^2 \cos^2\alpha}{\frac{1}{2}.g} = 0$$

نحصل على معادلة من الدرجة الثانية صيغتها : $ay^2 + by + c = 0$ مع $a = 1$

و $b = -\dfrac{v_0^2.\cos^2\alpha.\tan\alpha}{0,5.g} = -\dfrac{(8,4)^2.\cos^2 40°.\tan 40°}{0,5.9,8} = -7,1$

و $c = -\dfrac{(h_A - z).v_0^2.\cos^2\alpha}{0,5.g} = -\dfrac{(2,4-3,325)(8,4)^2.\cos^2 40°}{0,5.9,8} = 7,8$

إذن : $y^2 - 7,1.y + 7,8 = 0$

نحسب Δ : $\Delta = b^2 - 4a.c = (-7,1)^2 - 4.1.7,8 = 19,21$

إذن الحلان هما :

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7,1-\sqrt{19,21}}{2} = 1,36m \\ y_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{7,1+\sqrt{19,21}}{2} = 5,74m \end{array} \right.$$

يجب إذن، أن يتموضع المدافع على مسافة أفقية قصوى $y_{\max} = 5,74m$ من المهاجم لكي يتمكن من صد الكرة بيده.

تمرين موضوعاتي 3 كرة القدم

أثناء مباراة لكرة القدم، قذف لاعب الكرة الموضوعة على عشب الملعب بسرعة $v_0 = 25m.s^{-1}$ في اتجاه يكون زاوية $\alpha = 17°$ بالنسبة للمستوى الأفقي.

1 - بافتراض أن القوة المطبقة من طرف الهواء على الكرة مهملة أمام وزنها، بين أن مسار مركز قصور الكرة مستوٍ؛ وأثبت معادلته. نأخذ كأصل للتواريخ لحظة قذف الكرة.

2 - توجد نقطة قذف الكرة على بعد $11m$ من المرمى.

علما أن قطر الكرة هو $d = 22cm$ وارتفاع العارضة الأفقية للمرمى عن سطح الملعب هو $h = 2,4m$، بين أن الكرة لا تمر تحت العارضة الأفقية للمرمى. في أية حالة تصطدم الكرة بالعارضة الأفقية ؟

حل

1 - معادلة المسار

تخضع الكرة أثناء حركتها، في المرجع الأرضي، إلى وزنها فقط ؛

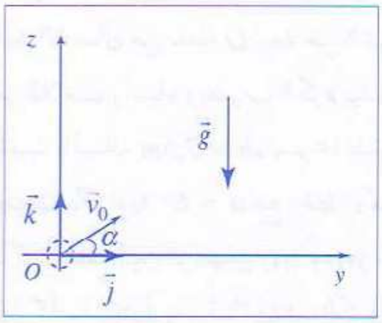
بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرة نكتب :

$m.\vec{g} = m.\vec{a}$ ومنه : $\vec{a} = \vec{g}$ (1)

حيث $\vec{a} = \vec{a}_G$ تسارع مركز قصور الكرة.

بما أن السرعة $\vec{v}_0$ والتسارع $\vec{a}$ متجهتان توجدان في المستوى Oyz

فإنه لا يوجد أي سبب لتغادر الكرة هذا المستوى، إذن يوجد مسار G في المستوى Oyz، أي أنه مستوٍ.

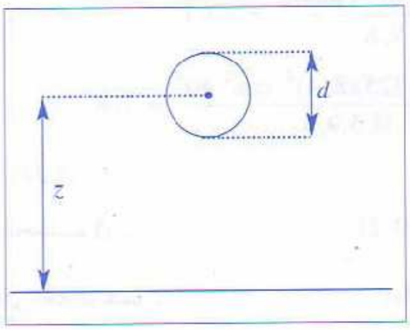


لإثبات معادلة المسار، نعتبر الشروط البدئية التالية :

- نقطة الانطلاق : $O(0,0)$

$$\vec{v}_0 \left| \begin{array}{l} v_{0y} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin\alpha \end{array} \right.$$

بإسقاط العلاقة (1) على المحورين Oy وOz نحصل على :



$\vec{a}\begin{cases} a_y = 0 \\ a_z = -g \end{cases}$ ومنه بالتكامل : $\vec{v}\begin{cases} v_y = k = v_0 \cos\alpha \\ v_z = -gt + k' = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}$

وبالتكامل كذلك نحصل على : $\overrightarrow{OG}\begin{cases} y = (v_0 \cos\alpha).t & (2) \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin\alpha).t \ ; & (3) \end{cases}$

تعطي العلاقة (2) : $t = \frac{y}{v_0 . \cos\alpha}$ ؛

نعوض في العلاقة (3) : $z = -\frac{1}{2}g.\frac{y^2}{v_0^2 . \cos^2\alpha} + y.\tan\alpha$ وهي معادلة المسار.

2 - هل تسجل الإصابة ؟

لتسجيل الإصابة في المرمى يجب أن يكون $z + \frac{d}{2} < 2,4m$ مع $h = 4,2m$ ارتفاع العارضة الأفقية.

نحسب z الارتفاع الموافق للأفصول $y = 11m$ ، باستعمال معادلة المسار :

$$z = -\frac{1}{2}.9,8.\frac{(11)^2}{(25)^2 . \cos^2 17°} + 11.\tan 17° = 2,32m$$

لتمر الكرة تحت العارضة الأفقية يجب أن يكون $z < 2,40 - \frac{d}{2}$ ، أي $z < 2,29\ m$.

إذن بما أن $z = 2,32m$، فإن الكرة لا تمر تحت العارضة.

ملحوظة : تصطدم الكرة بالعارضة في المجال $2,40 - \frac{d}{2} < z < 2,40 + \frac{d}{2}$ أي $2,29m < z < 2,51m$

تمرين 1 دور حركة إلكترون في مجال مغنطيسي منتظم

تدخل حزمة من الإلكترونات، بسرعة بدئية $\vec{v}_0$ ، فضاء فارغا، حيث يوجد مجال مغنطيسي منتظم شدته $B = 6,02.10^{-3}T$

علما أن متجهة السرعة $\vec{v}_0$ عمودية على متجهة المجال المغنطيسي $\vec{B}$ ؛

1 ـ عبر عن شدة القوة المغنطيسية المطبقة على إلكترون بدلالة B و e و v.

2 ـ بتطبيق القانون الثاني لنيوتن :

2.1 ـ عين الإحداثيين a_N و a_T لمتجهة التسارع للإلكترون في معلم فريني.

2.2 ـ استنتج طبيعة الحركة.

3 ـ احسب دور حركة الإلكترون.

نعطي : $v_0 = 6.10^7 m.s^{-1}$, $e = 1,6.10^{-19}C$, $m(e^-) = 9,1.10^{-31}kg$

حل

1 ـ تعبير شدة القوة المغنطيسية

لدينا : $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B}$ ومنه : $F = |q|v.B.|\sin(q.\vec{v}, \vec{B})|$

بما أن $\vec{v}$ عمودية على $\vec{B}$ فإن : $(q.\vec{v}, \vec{B}) = \dfrac{\pi}{2}$ ومنه : $F = e.v.B$ لأن $|q| = e$

2.1/2 ـ حسب القانون الثاني لنيوتن نكتب : $\vec{F} = m.\vec{a}$

بما أن $\vec{F}$ عمودية على $\vec{v}$ ، فإن إحداثييها في معلم فريني هما :

$$\vec{F}\left|\begin{array}{l} F_T = 0 \\ F_N = F = e.v.B \end{array}\right. \quad \text{وبالتالي :} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}\left|\begin{array}{l} a_T = 0 \\ a_N = \dfrac{e.v.B}{m} \end{array}\right.$$

2.2 ـ لدينا $a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0$ ومنه فإن السرعة ثابتة أي أن $v = v_0$

لدينا كذلك $a_N = \dfrac{e.v_0B}{m}$ ومنه : $\dfrac{v_0^2}{\rho} = \dfrac{e.v_0B}{m}$

أي أن : $\rho = \dfrac{m.v_0}{e.B} = R = cte$

نستنتج أن حركة الإلكترونات داخل المجال المغنطيسي المنتظم دائرية منتظمة.

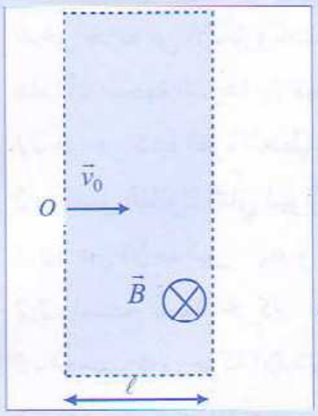
3 ـ الدور T للحركة

لدينا : $T = \dfrac{2.\pi}{\omega}$ مع $\omega = \dfrac{v_0}{R}$ ؛ تصبح العلاقة كالتالي : $T = \dfrac{2.\pi.R}{v_0}$

نعوض R بتعبيرها $\left(R = \dfrac{m.v_0}{e.B}\right)$ فنجد : $T = \dfrac{2.\pi.m}{e.B}$

أي أن : $T = \dfrac{2.\pi.m}{eB} = \dfrac{2.\pi.9,1.10^{-31}}{1,6.10^{-19}.6,02.10^{-3}} \approx 6.10^{-9}s$

تمرين 2 الانحراف الزاوي



تدخل دقيقة شحنتها q موجبة وكتلتها m، ابتداء من النقطة O بسرعة $\vec{v}_0$ ، فضاء فارغا حيث يوجد مجال مغنطيسي منتظم، عرض منطقة المجال المغنطيسي يساوي $\ell = 2cm$ ومتجهة السرعة $\vec{v}_0$ متعامدة مع متجهة المجال $\vec{B}$.

1 - عين طبيعة حركة الدقيقة، حيث يوجد المجال المغنطيسي $\vec{B}$، نهمل وزن الدقيقة.

2 - إذا علمنا أن الدقيقة هي نواة ذرة الهيليوم $^{4}_{2}He^{2+}$ ، حدد شحنتها وشعاع مسارها .

نعطي : $e = 1,6.10^{-19}C$; $m_p = 1u = 1,66.10^{-27}kg$; $B = 4.10^{-2}T$; $v_0 = 10^6 m.s^{-1}$

3 - احسب الانحراف الزاوي α للدقيقة.

حل

1 - طبيعة الحركة

داخل المجال المغنطيسي، تخضع الدقيقة فقط لقوة مغنطيسية ؛

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نكتب : $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B} = m.\vec{a}$ ومنه : $\vec{a} = \dfrac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$

حسب تعبير المتجهة $\vec{a}$ ، فإن هذه الأخيرة عمودية على $\vec{v}$ وعلى $\vec{B}$ ؛

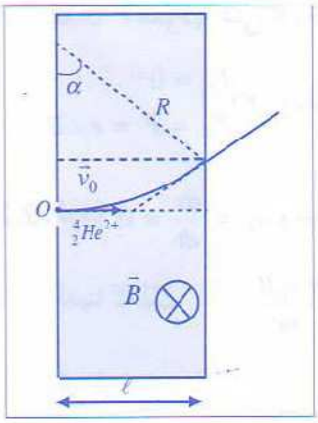
أي أن $\vec{a} = \vec{a}_N$ و $a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0$

وبالتالي فإن السرعة ثابتة يعني $v = v_0$ إذن، حركة الدقيقة منتظمة.

بما أن $a = a_N$ فإن : $F = m.a_N$ ومنه : $|q|v_0B = m\dfrac{v_0^2}{\rho}$

أي أن : $\rho = \dfrac{m.v_0}{|q|B} = R$

بما أن شعاع مسار الانحناء للدقيقة ثابت، فإن حركتها حركة دائرية منتظمة .



2 - شحنة الدقيقة وشعاع مسارها

شحنة نواة ذرة الهيليوم هي : $q = 2e = 2.1,6.10^{-19} = 3,2.10^{-19}C$

كتلة نواة ذرة الهيليوم هي : $m = A.m_p = 4.m_p = 4.1,66.10^{-27} = 6,64.10^{-27}kg$

حساب شعاع المسار

$$R = \frac{m.v_0}{q.B} = \frac{6,64.10^{-27}.10^6}{3,2.10^{-19}.4.10^{-2}} = 51,87cm$$

3 - حساب الانحراف الزاوي α

حسب الشكل الممثل جانبه، لدينا :

$\sin\alpha = \dfrac{\ell}{R} = \dfrac{2.10^{-2}}{51,87.10^{-2}}$ ومنه : $\alpha \approx 2,2°$

تمرين 3

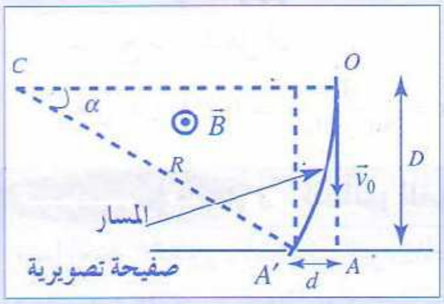
تدخل، عند النقطة O ، دقيقة شحنتها q موجبة وكتلتها m تتحرك بسرعة v_0 ، حيزا من الفضاء يوجد فيه مجال مغنطيسي منتظم متجهته $\vec{B}$ عمودية على المتجهة $\vec{v}_0$.

1- بين بطريقتين مختلفتين أن حركة الدقيقة منتظمة في هذه الحالة.

2- بين أن مسار الدقيقة دائري.

3- عبر عن منظم السرعة $\vec{v}_0$ بدلالة q و B و m والشعاع R لمسار الدقيقة.

4- تمكن صفيحة تصويرية متعامدة مع $\vec{v}_0$ وتبعد عن النقطة O بالمسافة $OA = D$ من ملاحظة انحراف الدقيقة عند النقطة A'.



نضع $AA' = d$ ونسمي C مركز المسار الدائري.

1.4- أوجد تعبير R بدلالة D و d. احسب R.

4.2- استنتج تعبير الانحراف الزاوي α، واحسب قيمته.

الدقيقة هي نواة الهيليوم كتلتها $m = 6,6410^{-27}kg$ وشحنتها : $q = 3,210^{19}C$

نعطي : $D = 0,1m$ و $d = 0,01m$

حل

1- الطريقة الأولى :

في المجال المغنطيسي المنتظم، تخضع الدقيقة المشحونة، فقط، لقوة مغنطيسية $\vec{F}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نكتب : $\vec{F} = q.\vec{v} \wedge \vec{B} = m.\vec{a}$ ومنه : $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$

حسب العلاقة : $\vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$ فإن $\vec{a}$ عمودية على $\vec{v}$ ، أي أن : $\vec{a} = \vec{a}_N$

و $a_T = \frac{dv}{dt} = 0$ ،وبالتالي فإن السرعة ثابتة، يعني أن : $v = v_0$ إذن، الحركة منتظمة.

- الطريقة الثانية :

يعبر عن قدرة القوة المغنطيسية بالعلاقة : $\mathcal{P} = \vec{F}.\vec{v}$

بما أن $\vec{F}$ عمودية على $\vec{v}$ ، فإن $\mathcal{P} = 0$

نعلم كذلك أن $\mathcal{P} = \frac{dEc}{dt} = o$ إذن، لا يغير المجال المغنطيسي الطاقة الحركية للدقيقة، وبالتالي فإن سرعتها تبقى ثابتة.

2- طبيعة مسار الدقيقة

- لدينا $\vec{F} = m.\vec{a}_N$ ومنه : $F = m.a_N$ أي أن : $|q|v_0B = m\frac{v_0^2}{\rho}$

وبالتالي : $\rho = \frac{m.v_0}{|q|B} = R$

شعاع الانحناء ثابت لأن : $v_0 = cte$ ، إذن، مسار الدقيقة دائري.

3- تعبير منظم السرعة $\vec{v}_0$

لدينا : $R = \frac{m.v_0}{|q|B}$ ومنه : $v_0 = \frac{|q|.B.R}{m}$

4.1/4- تعبير R بدلالة D و d

بتطبيق مبرهنة فيتاغورس نكتب : $R^2 = D^2 + (R-d)^2$

ومنه : $R^2 = D^2 + R^2 + d^2 - 2Rd$ أي أن : $R = \frac{D^2 + d^2}{2d}$

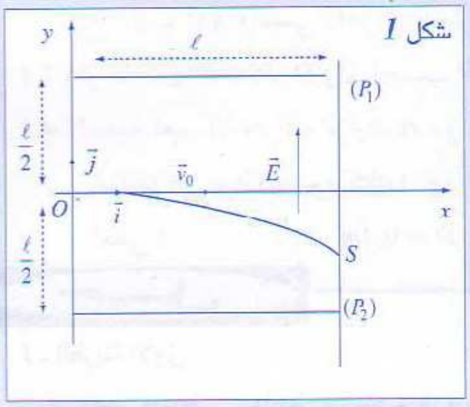
$$R = \frac{D^2 + d^2}{2d} = \frac{(0,1)^2 + (0,01)^2}{2(0,01)} = 0,505m$$

4.2 - تعبير الانحراف الزاوي

نستنتج من الشكل أن : $\sin\alpha = \dfrac{D}{R}$

يعني أن : $\sin\alpha = \dfrac{0,1}{50,5.10^{-2}} = 0,198$ ومنه : $\alpha = 11,42°$

تمرين 4 التأثير المتزامن لـ $\vec{E}$ و $\vec{B}$ على دقيقة مشحونة



نهمل وزن الإلكترون أمام باقي القوى المطبقة عليه.

نعطي كتلة الإلكترون $m = 9,1.10^{-31}kg$ وشحنته $q = -e = -1,6.10^{-19}C$

يمثل الشكل (1) صفيحتين فلزيتين أفقيتين (P_1) و (P_2) طول كل واحدة $\ell = 5cm$ وتفصل بينهما المسافة ℓ.

نختار في المستوى الرأسي، معلما متعامدا ممنظما $(O,\vec{i},\vec{j})$، بحيث يكون أصله O في منتصف المسافة ℓ.

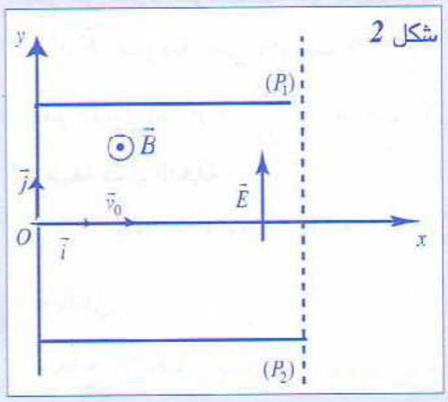
تدخل إلكترونات إلى الحيز $\mathcal{R}$ المحصور بين الصفيحتين بسرعة أفقية $\vec{v}_0$ من النقطة O وفق المحور Ox.

1 - تحدث الصفيحتان (P_1) و (P_2) في الحيز $\mathcal{R}$ مجالا كهرساكنا منتظما متجهته $\vec{E}$ عمودية على $\vec{v}_0$ ومنحاها نحو الأعلى فتنحرف الإلكترونات في المستوى $(O,\vec{i},\vec{j})$، وتخرج من الحيز $\mathcal{R}$ عند نقطة S أرتوبها $y_S = \dfrac{-\ell}{4}$ بسرعة $\vec{v}_S$، انظر الشكل (1)

1.1 - بيّن أن شغل القوة الكهرساكنة $\vec{F}_e = q.\vec{E}$ المطبقة على إلكترون بين O و S هو : $W_{OS}(\vec{F}_e) = e.E.\dfrac{\ell}{4}$

1.2 - بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية بين لحظة دخول إلكترون من النقطة O ولحظة خروجه من النقطة S، أوجد تعبير السرعة v_S بدلالة v_0 و e و E و ℓ و m.

احسب v_S، علما أن $v_0 = 4,2.10^{6}m.s^{-1}$ و $E = 10^{3}V.m^{-1}$



2 - بالإضافة إلى المجال الكهرساكن $\vec{E}$ السابق، نحدث في الحيز $\mathcal{R}$ مجالا مغنطيسيا منتظما متجهته $\vec{B}$ عمودية على المستوى (Ox,Oy) ومنحاها كما هو مبيّن في الشكل (2)، بحيث تخترق الإلكترونات الحيز $\mathcal{R}$ وفق المحور Ox دون أن تنحرف.

بيّن أن حركة إلكترون تكون منتظمة، واستنتج تعبير شدة المجال المغنطيسي بدلالة E و v_0. احسب B.

3 - نحذف المجال الكهرساكن $\vec{E}$ ونحتفظ في الحيز $\mathcal{R}$ بالمجال المغنطيسي $\vec{B}$ السابق.

3.1 - بيّن أن حركة إلكترون داخل المجال $\vec{B}$ منتظمة ودائرية.

3.2 - احسب الشعاع R للمسار الدائري.

3.3 - علما أن الإلكترونات تخرج من المجال $\vec{B}$ عند نقطة S' أرتوبها $y_{S'} < \dfrac{\ell}{2}$ بسرعة $\vec{v}_{S'}$

احسب زاوية الانحراف المغنطيسي $\alpha = (\vec{v}_0, \vec{v}_{S'})$ (الانحراف الزاوي).

حـــل

1.1/1 - شغل القوة الكهرساكنة $\vec{F}_e$ بين O و S.

لدينا : $W_{OS}(\vec{F}_e) = \vec{F}_e.\overrightarrow{OS} = -e.\vec{E}.\overrightarrow{OS}$

ومنه : $W_{OS}(\vec{F}_e) = -e\big(E_x.(x_S - x_0) + E_y.(y_S - y_0)\big)$

لدينا : $y_S = -\dfrac{\ell}{4}$ و $y_0 = 0$ و $E_y = E$ و $E_x = 0$

إذن : $W_{OS}(\vec{F}_e) = -e.E_y.y_S = e.E.\dfrac{\ell}{4}$

1.2 - تعبير السرعة v_S

بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية بين O و S نكتب :

$$\Delta E_C = E_C(S) - E_C(0) = W_{OS}(\vec{F}_e)$$

$$\Delta E_C = \frac{1}{2}m.v_S^2 - \frac{1}{2}m.v_0^2 = e\frac{E.\ell}{4}$$

ومنه : $v_S^2 - v_0^2 = \dfrac{e.E.\ell}{2.m}$ أي أن : $v_S = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{e.E.\ell}{2.m}}$

$$v_S = \sqrt{(4,2.10^6)^2 + \frac{1,6.10^{-19}.10^3.5.10^{-2}}{2.9,1.10^{31}}} \approx 4,7.10^6 m.s^{-1}$$

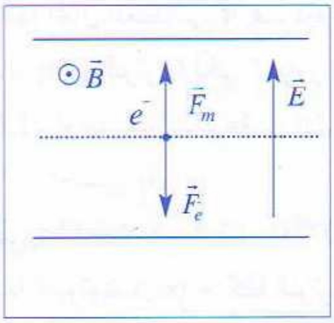
2 - طبيعة حركة الإلكترون في الحيز $\mathcal{R}$

يخضع الإلكترون أثناء حركته في المجالين $\vec{E}$ و $\vec{B}$ إلى :

$\vec{P}$: وزن الإلكترون وهو مهمل ؛

$\vec{F}_e$: القوة الكهرساكنة ؛

$\vec{F}_m$: القوة المغنطيسية.



$\vec{F}_e$ و $\vec{F}_m$ رأسيتان والإلكترون لا ينحرف أثناء حركته، وبالتالي فإن $\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$

يعني أن : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

إذن، حسب مبدإ القصور فإن حركة الإلكترون حركة مستقيمية منتظمة

- تعبير شدة المجال المغنطيسي $\vec{B}$.

لدينا $\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$ ومنه : $F_e = F_m$ أي أن : $|q|E = |q|v_0 B$

وبالتالي : $B = \dfrac{E}{v_0} = \dfrac{10^3}{4,2.10^6} = 2,38.10^{-4}T$

3 - تأثير المجال المغنطيسي وحده

3.1 - في هذه الحالة يخضع الإلكترون فقط إلى القوة المغنطيسية $\vec{F}_m$ ؛

حسب القانون الثاني لنيوتن نكتب : $\vec{F}_m = q.\vec{v} \wedge \vec{B} = m.\vec{a}$

ومنه : $\vec{a} = \dfrac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$

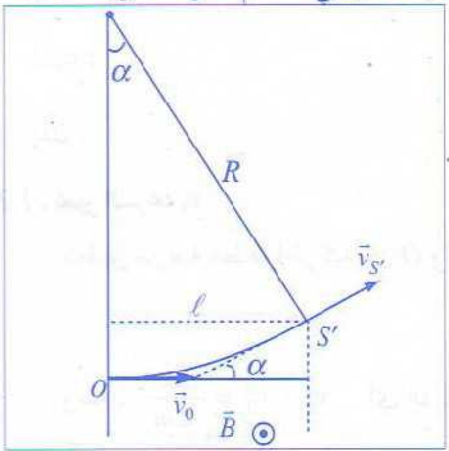
بما أن $\vec{a}$ عمودية على $\vec{v}$ فإن : $a_T = \dfrac{dv}{dt} = 0$

وبالتالي فسرعة الإلكترون ثابتة، أي أن : $v = v_0$

من جهة أخرى نكتب $F_m = m.a_N$ ، يعني أن : $|q|v_0B = m\dfrac{v_0^2}{\rho}$

ومنه : $\rho = \dfrac{m.v_0}{|q|B} = R$

بما أن منظم السرعة $\vec{v}$ وشعاع الانحناء ثابتين فإن حركة الإلكترون، داخل المجال المغنطيسي المنتظم، حركة دائرية منتظمة.



3.2 - شعاع المسار الدائري هو : $R = \dfrac{m.v_0}{e.B}$

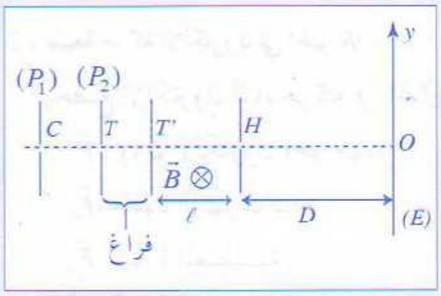
يعني أن : $R = \dfrac{m.v_0}{e.B} = \dfrac{9,1.10^{-31}.4,2.10^{6}}{1,6.10^{-19}.2,38.10^{-4}} = 0,1m$

3.3 - حساب الانحراف الزاوي α

نستنتج باعتماد الشكل الممثل جانبه أن : $\sin\alpha = \dfrac{\ell}{R}$

ومنه : $\sin\alpha = \dfrac{5.10^{-2}}{10.10^{-2}} = 0,5$ أي أن : $\dot{\alpha} = 30°$

تمرين 5



نتوفر على جهاز يمكن من إنتاج أيونات $^{6}_{3}Li^{+}$ وأيونات $^{A}_{3}Li^{+}$ في الفراغ.

تغادر هذه الأيونات النقطة C بسرعة بدئية مهملة (الشكل جانبه).

تُسرَّع هذه الأيونات بين الصفيحتين (P_1) و (P_2) تحت تأثير توتر $U = V_{p_1} - V_{p_2}$

فتدخل مجالا مغنطيسيا $\vec{B}$ منتظما في حيز طوله $\ell = 2cm$.

متجهة المجال المغنطيسي $\vec{B}$ عمودية على مستوى الشكل وشدته $B = 6.10^{-2}T$

1 - ما إشارة التوتر U لكي تتجاوز الأيونات الثقب T ؟ علل جوابك.

2.1/2 - أوجد تعبير السرعة v_1 للأيونات $^{6}_{3}Li^{+}$ عند مرورها عبر الثقب T بدلالة كتلتها m_1 وشحنتها q والتوتر U ؛ احسب v_1 .

نعطي : الشحنة الابتدائية : $e = 1,6.10^{-19}C$

- كتلة البروتون $(m_p) \approx$ كتلة النوترون (m_n) : $m_p = m_n = 1,67.10^{-27}kg$

- $U = 100V$

2.2 - اشرح لماذا تصل الأيونات $^{6}_{3}Li^{+}$ إلى الثقب T' بنفس السرعة v_1 المحصل عليها عند الثقب T.

3.1/3 - ما طبيعة حركة الأيونات $^{6}_{3}Li^{+}$ في الحيز الذي يوجد فيه المجال $\vec{B}$ ؟

3.2 - أوجد تعبير الشعاع R_1 لمسار أيونات $^{6}_{3}Li^{+}$ بدلالة B و e و m_1 و U ؛ احسب R_1 .

3.3 - احسب زاوية الانحراف α_1 لأيونات $^{6}_{3}Li^{+}$.

3.4 - احسب الأرتوب y_1 لنقطة الاصطدام على الشاشة E للأيونات $^{6}_{3}Li^{+}$.

نعطي : $D = 50cm$

4 - في الحقيقة هناك مساران متباينان.

لتكن m_2 كتلة الأيونات $^{A}_{3}Li^{+}$ و R_2 شعاع مسارها.

$^{6}_{3}Li^{+}$ و $^{A}_{3}Li^{+}$ نظيران لهما نفس الشحنة q وكتلتاهما مختلفتان $(m_1 \neq m_2)$.

4.1 - بين أن العلاقة $\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2}$ لا تتعلق إلا بالكتلتين m_1 و m_2، حيث تمثل α_2 زاوية الانحراف لأيونات $^{A}_{3}Li^{+}$.

4.2 - احسب عدد الكتلة A لأيونات $^{A}_{3}Li^{+}$، علما أن $\alpha_2 = 21,6°$

حـــل

1 - إشارة التوتر U.

بما أن شحنة الأيونات Li^{+} موجبة، فإنها تُسَرَّعُ نحو الجهود التناقصية ؛

أي أن $V_{p_2} < V_{p_1}$ ومنه : $U = V_{p_1} - V_{p_2} > 0$

2.1/2 - تعبير السرعة v_1 للأيونات $^{6}_{3}Li^{+}$

بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية بين (P_1) و (P_2) نكتب :

$$\Delta E_C = E_C(P_2) - E_C(P_1) = W_{P_1P_2}(\vec{F}_e)$$

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} m_1.v_1^2 - 0 = q(V_{p_1} - V_{p_2})$$

يعني أن : $\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = q.U$ ومنه : $v_1 = \sqrt{\frac{2.q.U}{m_1}}$ مع $q = +e$ و $m_1 = 6m_p$

نحصل على : $v_1 = \sqrt{\frac{2eU}{6m_p}} = \sqrt{\frac{2.1,6.10^{-19}.100}{6.1,67.10^{-27}}} = 5,65.10^{4} m.s^{-1}$

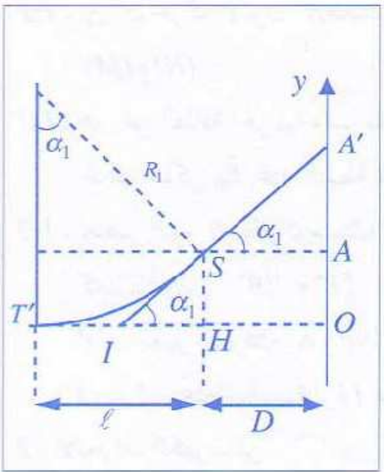
2.2 - تفسير

بين الموضعين T و T'، لا تخضع الأيونات لأية قوة يعني $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$ ، إذن، تبقى سرعة الأيونات في هذا الحيز ثابتة

3.1/3 - طبيعة الحركة

بما أن الأيونات تدخل الحيز الذي يوجد فيه المجال المغنطيسي المنتظم بسرعة متجهتها عمودية على متجهة المجال $\vec{B}$ ، فإن حركة الأيونات في هذا الحيز، حركة دائرية منتظمة (انظر البرهنة في التمارين السابقة).

3.2 - تعبير الشعاع



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن نكتب : $\vec{F}_m = q.\vec{v}_1 \wedge \vec{B} = m_1.\vec{a}_N$

ومنه : $|q|v_1B = m_1 \frac{v_1^2}{R_1}$. أي أن : $R_1 = \frac{m_1 v_1}{e.B}$ مع $|q| = e$

يعني : $R_1 = \frac{6.m_p.v_1}{e.B} = \frac{6.1,67.10^{-27}.5,65.10^{4}}{1,6.10^{-19}.6.10^{-2}} = 5,9.10^{-2} m$

3.3 - حساب زاوية الانحراف α_1 (الانحراف الزاوي)

تغادر الأيونات المجال $\vec{B}$ عند النقطة S، لتأخذ حركة مستقيمية منتظمة مسارها مجسد بالمماس للمسار الدائري عند النقطة S، لتصطدم بالشاشة عند النقطة A' ؛

حسب الشكل نكتب : $\sin \alpha_1 = \frac{\ell}{R_1}$

يعني أن : $\sin \alpha_1 = \frac{2}{5,9} = 0,339$ ، أي أن : $\alpha_1 = 19,8°$.

3.4 ـ حساب أرتوب نقطة الاصطدام

لدينا حسب الشكل $\tan\alpha_1 = \dfrac{AA'}{D}$ ومنه : $AA' = D\tan\alpha_1$

لدينا كذلك : $OA = R_1 - R_1.\cos\alpha = R_1(1-\cos\alpha_1)$

إذن : $y_1 = OA + AA'$ ومنه : $y_1 = D\tan\alpha_1 + R_1(1-\cos\alpha_1)$

4.1/4 ـ البرهنة

لدينا : $\sin\alpha = \dfrac{\ell}{R}$ ومنه : $\sin\alpha_1 = \dfrac{\ell}{R_1}$ و $\sin\alpha_2 = \dfrac{\ell}{R_2}$

أي أن : $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{R_2}{R_1}$

بما أن $R_1 = \dfrac{m_1v_1}{e.B}$ و $R_2 = \dfrac{m_2v_2}{e.B}$ ، فإن : $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{m_2v_2}{m_1v_1}$

لدينا كذلك : $v_1 = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_1}}$ و $v_2 = \sqrt{\dfrac{2eU}{m_2}}$ ومنه : $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \dfrac{m_2}{m_1}.\sqrt{\dfrac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\dfrac{m_2}{m_1}}$

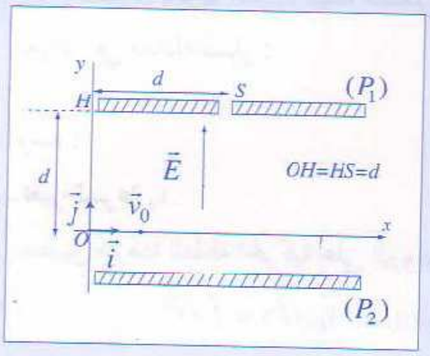
4.2 ـ تحديد عدد الكتلة A

بتعويض : $m_1 = 6m_p$ و $m_2 = A.m_p$ نحصل على : $\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \sqrt{\dfrac{A}{6}}$

نستنتج إذن : $A = 6\left(\dfrac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2}\right)^2 = 6\left(\dfrac{\sin 19,8°}{\sin 21,46°}\right)^2 = 5$

تمـرين 1 تأثير مجال كهرساكن $\vec{E}$ على حركة بروتون

يدخل بروتون كتلته m وشحنته q مجالا كهرساكنا منتظما $\vec{E}$ يوجد بين صفيحتين (P_1) و(P_2) أفقيتين ومتوازيتين (الشكل جانبه).



يدخل البروتون إلى المجال $\vec{E}$ انطلاقا من النقطة O بسرعة $\vec{v}_0$ عمودية على $\vec{E}$ وينحرف في المستوى الرأسي (Ox,Oy).

نهمل وزن الإلكترون أمام القوة الكهرساكنة المطبقة على البروتون.

1 ـ أثبت معادلة مسار البروتون في المستوى (Ox,Oy). ما طبيعة هذا المسار ؟

نأخذ لحظة دخول البروتون إلى المجال $\vec{E}$ عند النقطة O أصلا للتواريخ.

2 ـ أوجد بدلالة m و v_0 و q و d تعبير شدة المجال $\vec{E}$ لكي يخرج البروتون من الثقب S للصفيحة (P_1) التي تبعد عن المحور Ox بالمسافة $d = OH$ مع $OH = HS = d$.

3 ـ أوجد، بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية، تعبير السرعة v_s التي يخرج بها البروتون من الثقب S بدلالة v_0 .

احسب v_s ، علما أن : $v_0 = 7.10^6 m.s^{-1}$

حـل

1 ـ معادلة مسار البروتون .

يخضع البروتون أثناء حركته في المجال الكهرساكن المنتظم $\vec{E}$ إلى القوة الكهرساكنة : $\vec{F} = q.\vec{E} = e.\vec{E}$ لأن وزنه مهمل.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على البروتون في المرجع الأرضي نكتب :

$$m.\vec{a} = \vec{F} = q\vec{E} \quad \text{ومنه :} \quad (1) \quad \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$$

بإسقاط العلاقة (1) على المحورين Ox و Oy نحصل على :

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = \dfrac{qE_x}{m} = 0 \\ a_y = \dfrac{qE}{m} = cte \end{vmatrix} \quad \text{لأن} \quad \vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = E \end{vmatrix}$$

الشروط البدئية للحركة :

$$\overrightarrow{OP_0}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{v}_0\begin{vmatrix} v_{ox} = v_0 \\ v_{oy} = 0 \end{vmatrix}$$

لدينا :

$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{qE}{m} \end{vmatrix}$ بالتكامل، نحصل على : $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = k = v_0 \\ v_y = \dfrac{qE}{m}t + k' = \dfrac{qE}{m}t \end{vmatrix}$ لأن $k' = 0$

لدينا كذلك $\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{qE}{m}t \end{vmatrix}$ بالتكامل، نحصل على : $\overrightarrow{OP}\begin{vmatrix} x = v_0 t + 0 \\ y = \dfrac{1}{2}\dfrac{qE}{m}.t^2 + 0 \end{vmatrix}$

بتركيب المعادلتين $x(t)$ و$y(t)$ نحصل على : $y = \dfrac{qE}{2m.v_0^2}.x^2$ وهي معادلة المسار.

إذن، مسار البروتون داخل المجال الكهرساكن المنتظم عبارة عن قوس من شلجم.

2 - **تعبير شدة المجال $\vec{E}$.**

عند النقطة S يكون حسب تبيانة الشكل : $x_S = y_S = d$

نعوض في معادلةالمسار : $d = \dfrac{qE}{2m.v_0^2}.d^2$

ومنه : $E = \dfrac{2m.v_0^2}{q.d}$

مبرهنة الطاقة الحركية :

$\Delta E_C = E_{cf} - E_{ci}$

$\Delta E_C = \dfrac{1}{2}m.v_f^2 - \dfrac{1}{2}m.v_i^2$

$\Delta E_C = \sum W(\vec{F}_{ext})$

3 - **تعبير السرعة v_s.**

بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على البروتون بين اللحظتين t_0 و t_S نكتب :

$$\Delta E_C = E_{C(S)} - E_C(0) = W_{OS}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{OS}$$

$$\frac{1}{2}mv_S^2 - \frac{1}{2}m.v_0^2 = qE_x(x_S - x_0) + qE_y(y_S - y_0)$$

باعتبار أن : $y_S = d$ و $E_y = E$ و $E_x = 0$

نحصل على : $\dfrac{1}{2}mv_S^2 - \dfrac{1}{2}m.v_0^2 = q.E.d$

وباحترام الشرط $E = \dfrac{2m.v_0^2}{q.d}$ ، نحصل على :

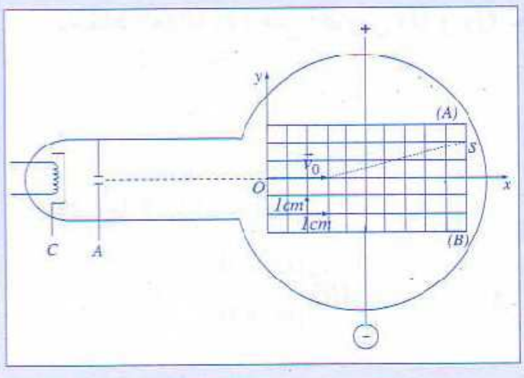
$\dfrac{1}{2}m.v_S^2 - \dfrac{1}{2}m.v_0^2 = 2v_0^2 m$ أي أن : $v_S^2 = 5v_0^2$

ومنه $v_S = v_0\sqrt{5} = 7.10^6.\sqrt{5} = 1,56.10^7 m.s^{-1}$

تمرين 2 مدفع الإلكترونات

تخرج الإلكترونات من المدفع بنفس متجهة السرعة $\vec{v}_0$ وتدخل، ابتداء من النقطة O حيزا من الفضاء يوجد به مجال كهرساكن منتظم $\vec{E}$

(انظر الشكل جانبه).نهمل وزن الإلكترون أمام القوة الكهرساكنة.



1 - أوجد معادلة مسار الإلكترونات في المعلم المتعامد الممنظم (Ox,Oy).

استنتج طبيعة حركة الإلكترونات في المجال $\vec{E}$.

2- احسب قيمة التوتر $U = V_A - V_B$ المطبق بين الصفيحتين (A) و(B)

3 - تمر الإلكترونات عند خروجها من المجال $\vec{E}$ من النقطة S.

استنتج قيمة منظم السرعة $\vec{v}_0$.

4 - حدد التوتر الأقصى الذي يجب تطبيقه بين الصفيحتين (A) و(B) لكي لايصطدم الإلكترون بالصفيحة (A).

معطيات :

$$m = 9,1.10^{-31}kg \ ; \ e = 1,6.10^{-19}C \ ; \ E = 2,0.10^{3}V.m^{-1}$$

حــل

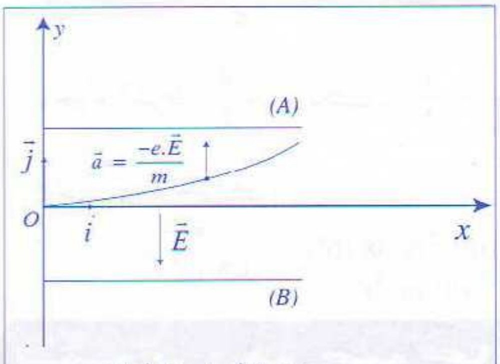
1 - معادلة مسار الإلكترون .

يخضع الإلكترون أثناء حركته داخل المجال الكهرساكن المنتظم $\vec{E}$ إلى القوة الكهرساكنة $\vec{F} = q\vec{E}$.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الإلكترون في المرجع الأرضي نكتب :

$$m.\vec{a} = q\vec{E} = -e.\vec{E} \quad \text{لأن} \quad q = -e$$

ومنه :
$$\vec{a} = -\frac{e\vec{E}}{m}$$



متجهة التسارع $\vec{a}$ لها نفس اتجاه ومنحى المتجهة $\vec{j}$

بإسقاط هذه العلاقة المتجهية على المحورين Ox وOy، نحصل على :

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{eE}{m} \end{vmatrix} \quad \text{لأن :} \quad \vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = -E \end{vmatrix}$$

- الشروط البدئية للحركة
$$\overrightarrow{OM}_0\begin{vmatrix} x_o = 0 \\ y_o = 0 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{v}_0\begin{vmatrix} v_{ox} = v_0 \\ v_{oy} = 0 \end{vmatrix}$$

لدينا
$$\begin{vmatrix} a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0 \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{eE}{m} \end{vmatrix} \quad \text{بالتكامل نحصل على :} \quad \vec{v}\begin{vmatrix} v_x = cte = v_0 \\ v_y = \frac{eE}{m}.t + 0 \end{vmatrix}$$

لدينا كذلك :
$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = \frac{dx}{dt} = v_0 \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{eE}{m}t \end{vmatrix} \quad \text{بالتكامل نحصل على :} \quad \overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x(t) = v_ot \\ y(t) = \frac{1}{2}\frac{eE}{m}.t^2 \end{vmatrix}$$

بإقصاء الزمن t بين $x(t)$ و$y(t)$ نحصل على معادلة المسار $y(x)$.

$$t = \frac{x}{v_0} \quad \text{ومنه :} \quad y = \frac{eE}{2mv_0^2}.x^2$$

إذن، مسار الإلكترون داخل مجال كهرساكن منتظم عبارة عن قوس من شلجم.

2 - حساب التوتر U

بتطبيق العلاقة $E = \frac{U}{d}$، نجد :

$$U = E.d = 2.10^3.6.10^{-2} = 120V \quad \text{مع} \quad d = 6cm$$

3 - حساب السرعة $\vec{v}_0$.

نقرأ إحداثيي النقطة S على الشكل : $x_S = 10cm$ و $y_S = 2cm$

باستعمال معادلة المسار نكتب :

$$y_S = \frac{e.E}{2m.v_0^2}.x_S^2$$

ومنه :

$$v_0 = \sqrt{\frac{e.E}{2m.y_S}}.x_S = \sqrt{\frac{1,6.10^{-19}.2.10^3}{2.9,1.10^{-31}.2.10^{-2}}}.0,1 \approx 9,4.10^6 m.s^{-1}$$

نعطي نتيجة U_{max} برقمين معبرين تبعا لمعطيات النص.

4 ـ حساب التوتر الأقصى

لا يصطدم الإلكترون بالصفيحة (A) إذا تحقق الشرط $y_S < \frac{d}{2}$

حسب معادلة المسار لدينا :

$$y_S = \frac{1}{2}\frac{e.E}{m.v_0^2}.x_S^2$$

مع $x_S = \ell$ و $E = \frac{U}{d}$ ، نحصل على :

$$y_S = \frac{e.U}{2m.d}.\frac{\ell^2}{v_0^2}$$

باحترام الشرط $y_S < \frac{d}{2}$ نكتب : $\frac{e.U}{2m.d}.\frac{\ell^2}{v_0^2} < \frac{d}{2}$ ومنه : $U < \frac{m.d^2.v_0^2}{e.\ell^2}$

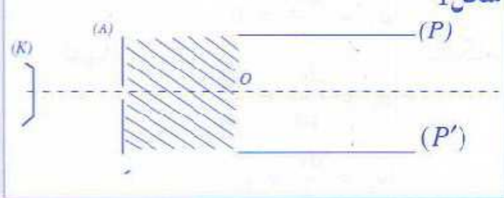
إذن التوتر الأقصى هو :

$$U_{max} = \frac{m.d^2.v_0^2}{e.\ell^2} = \frac{9,1.10^{-31}.(6.10^{-2})^2(9,38.10^6)^2}{1,6.10^{-19}.(10.10^{-2})^2} \approx 1,8.10^2 V$$

تمرين موضوعاتي 3 مبدأ اشتغال راسم التذبذب

يتكون مدفع الإلكترونات الموجود في راسم التذبذب من كاثود K وأنود A ، في حيز فارغ.

شكل1



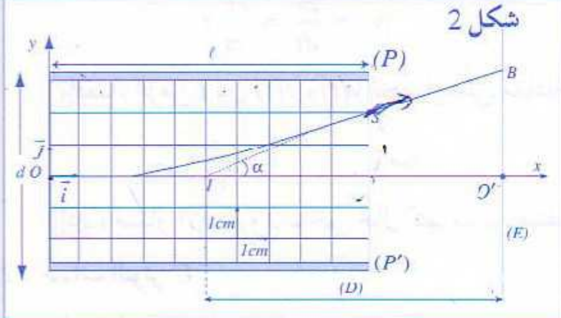
تنبعث الإلكترونات من الكاثود K بدون سرعة بدئية، وتسرع بالتوتر $U_0 = V_A - V_K$ المطبق بين الكاثود K والأنود A ، شكل 1.

1 ـ تصل الإلكترونات إلى الأنود A بسرعة أفقية $\vec{v}_0$.

عبر عن منظم السرعة $\vec{v}_0$ بدلالة U_0 و e و m. احسب v_0 .

2 ـ تخترق الإلكترونات الأنود A وتصل إلى نقطة O.

شكل 2



نعتبر أن المجال الكهرساكن منعدم في الحيز الموجود بين الأنود A والمستوى الرأسي المار من النقطة O، (حيز فارغ).

بين أن سرعة الإلكترون تكون ثابتة بين الأنود A والمستوى الرأسي المار من O.

3 ـ تدخل حزمة الإلكترونات المجال الكهرساكن المنتظم $\vec{E}$ الموجود بين الصفيحتين (P) و (P') ابتداء من النقطة O ، شكل 2.

نطبق بين (P) و (P') توترا كهربائيا $U = V_P - V_{P'} > 0$ ؛

ونعلم موضع الإلكترون بإحداثييه على المحورين Ox و Oy.

نعتبر لحظة مرور الإلكترون من النقطة O أصلا للتواريخ. بين أن معادلة مسار الإلكترون تكتب على الشكل :

$$y = \frac{1}{4.d}.\frac{U}{U_0}.x^2$$

4 ـ أوجد تعبير شغل القوة الكهرساكنة $\vec{F}$ أثناء انتقال الإلكترون من النقطة O إلى النقطة S التي يغادر عندها الإلكترون المجال الكهرساكن $\vec{E}$.

5 ـ نرمز للانحراف الزاوي بـ α ،الشكل 2.

5.1 ـ استنتج مبيانيا قيمة $tan\alpha$.

5.2 ـ بين أن تعبير $tan\alpha$ يكتب على الشكل : $\tan\alpha = \frac{\ell}{2d}.\frac{U}{U_0}$

5.3 ـ احسب قيمة U.

معطيات : $U_0 = 1140V$; $e = 1,6.10^{-19}C$ ، كتلة الإلكترون : $m = 9,1.10^{-31}kg$

6 ـ يصل الإلكترون إلى النقطة S بسرعة $\vec{v}_S$.

أوجد، بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية قيمة v_S .

7 ـ يصطدم الإلكترون عند نقطة B بشاشة رأسية تبعد عن الخط الرأسي المار من النقطة I بالمسافة D.

بين أن : $y_B = k.U$ مع $k = \frac{\ell.D}{2.d.U_0}$.احسب y_B في حالة $D = 25cm$.

حل

1 ـ تعبير منظم السرعة $\vec{v}_0$.

يخضع الإلكترون أثناء حركته بين الكاثود K والأنود A إلى القوة الكهرساكنة $\vec{F}_0$.

بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية بين اللحظتين t_K و t_A نكتب : $\Delta E_C = \frac{1}{2}m.v_A^2 - \frac{1}{2}m.v_K^2 = W_{KA}(\vec{F}_0) = -e(V_K - V_A)$

أي أن : $\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 = e.U_0$ مع $v_A = v_0$ و $v_K = 0$ و $-(V_K - V_A) = U_0$

ومنه : $v_0 = \sqrt{\frac{2.e.U_0}{m}} = \sqrt{\frac{2.1,6.10^{-19}.1140}{9,1.10^{-31}}} = 2.10^7.m.s^{-1}$

2 ـ البرهنة على ثبات $\vec{v}_0$ بين A و O

يخضع الإلكترون في حيز الفضاء المحصور بين A و O إلى وزنه فقط، وبما أن الوزن مهمل فهو لا يؤثر في الحركة ؛

إذن $\sum \vec{F}_{ext} = m.\vec{a} = \vec{0}$ ومنه $\vec{a} = \vec{0}$ أي أن : $\vec{v} = \vec{v}_0 = \overrightarrow{cte}$

3 ـ إثبات تعبير معادلة المسار

يخضع الإلكترون أثناء حركته بين الصفيحتين (P) و (P') إلى القوة الكهرساكنة $\vec{F} = q\vec{E} = -e.\vec{E}$ ، لأن الوزن مهمل.

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الإلكترون أثناء حركته في المجال $\vec{E}$، بالنسبة لمرجع أرضي نكتب :

$m.\vec{a} = -e\vec{E}$ أي أن : $\vec{a} = -\frac{e}{m}.\vec{E}$

بإسقاط هذه العلاقة المتجهية على المحورين Ox و Oy ، نحصل على :

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = 0 \\ a_y = \frac{e.E}{m}\end{vmatrix} \quad \text{لأن :} \quad \vec{E}\begin{vmatrix} E_x = 0 \\ E_y = -E\end{vmatrix}$$

الشروط البدئية للحركة :

لدينا عند $t = 0$:

$$\overrightarrow{OM}\begin{vmatrix} x_0 = 0 \\ y_0 = 0\end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \vec{v}_0\begin{vmatrix} v_{0x} = v_0 \\ v_{0y} = 0\end{vmatrix}$$

بما أن $\begin{cases} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = v_0 \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = \dfrac{eE}{m} \end{cases}$ نحصل بالتكامل على : $\vec{v} \begin{cases} v_x = k = v_0 \\ v_y = \dfrac{e.E}{m}.t \end{cases}$

وبما أن $\vec{v} \begin{cases} v_x = \dfrac{dx}{dt} = v_0 \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{eE}{m}.t \end{cases}$ نحصل بالتكامل على : $\overrightarrow{OM} \begin{cases} x = v_0.t \\ y = \dfrac{1}{2}\dfrac{e.E}{m}.t^2 \end{cases}$

للحصول على معادلة المسار، نقصي t بين $x(t)$ و$y(t)$ بتركيبهما ؛

إذن : $t = \dfrac{x}{v_0}$ ومنه : $y = \dfrac{1}{2}\dfrac{eE}{m}.\dfrac{x^2}{v_0^2}$

أي أن مسار الإلكترون عبارة عن قوس من شلجم.

رأينا خلال السؤال 1 أن : $v_0^2 = \dfrac{2e.U_0}{m}$

نعوض v_0^2 بتعبيرها في $y(x)$ و E بـ $\dfrac{U}{d}$، فنحصل على :

$$y = \frac{e.U}{2.m.d}.\frac{x^2}{\frac{2.eU_0}{m}} = \frac{1}{4.d}.\frac{U}{U_0}.x^2$$

4 - شغل القوة الكهرساكنة بين O وS.

$$W_{OS}(\vec{F}) = \vec{F}.\overrightarrow{OS} = -e\vec{E}.\overrightarrow{OS} = -e\left[E_x(x_S - x_0) + E_y(y_S - y_0)\right]$$

بما أن $E_x = 0$ و $E_y = -E = -\dfrac{U}{d}$ نحصل على : $W_{OS}(\vec{F}) = +e.E.y_s = \dfrac{e.U}{d}.y_S$ مع $y_S = \dfrac{1}{4.d}.\dfrac{U}{U_0}\ell^2$

إذن : $W_{OS}(\vec{F}) = \dfrac{1}{4}.\dfrac{\ell^2}{d^2}.\dfrac{e.U^2}{U_0}$

5.1/5 - قيمة $\tan\alpha$

نحدد، مبيانيا، بقراءة الشكل 2 : $\tan\alpha = \dfrac{2}{5} = 0,4$

5.2 - البرهنة على تعبير $\tan\alpha$

نستنتج هندسيا من الشكل (2) أن : $\tan\alpha = \dfrac{y_S}{\frac{\ell}{2}} = \dfrac{2y_S}{\ell}$

بتعويض y_S بقيمتها نحصل على : $\tan\alpha = \dfrac{\ell}{2d}.\dfrac{U}{U_0}$

5.3 - حساب قيمة التوتر U

نستنتج من العلاقة السابقة :

$$U = \frac{2.d.U_0}{\ell}.\tan\alpha = \frac{2.6.10^{-2}.1140.0,4}{10.10^{-2}} = 547,2V$$

6 - **حساب قيمة** v_S.

بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية بين O و S نكتب :

$$E_C(S) - E_C(0) = W_{OS}(\vec{F})$$

$$\frac{1}{2}mv_S^2 - \frac{1}{2}m.v_0^2 = \frac{e.\ell^2.U^2}{4d^2.U_0}$$

ومنه :

$$v_S = \sqrt{v_0^2 + \frac{e.\ell^2.U^2}{2m.d^2.U_0}} = \sqrt{(2.10^7)^2 + \frac{1,6.10^{-19}.(10.10^{-2})^2.(547,2)^2}{2.9,1.10^{-31}.(6.10^{-2})^2.1140}} = 2,15.10^7 m.s^{-1}$$

7 - **البرهنة على تعبير** y_B.

نستنتج هندسيا من الشكل 2 :

$$\tan\alpha = \frac{O'B}{IO'} = \frac{y_B}{D}$$

ومنه :

$$y_B = D.\tan\alpha = D.\frac{\ell}{2d}.\frac{U}{U_0}$$

$$y_B = \frac{D.\ell}{2.d.U_0}.U = k.U$$

أي أن :

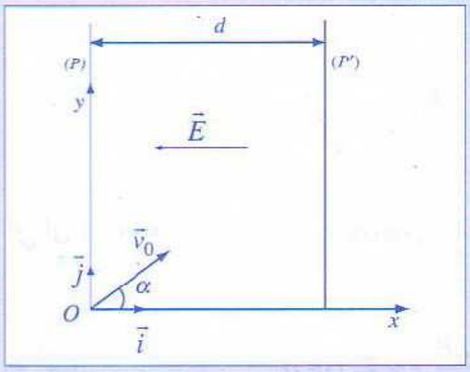
$$y_B = \frac{25.10^{-2}.10.10^{-2}}{2.6.10^{-2}.1140}.547,2 = 0,1m = 10cm$$

تمرين 4 حركة بروتون في مجال كهرساكن

يدخل، انطلاقا من النقطة O، بروتون مجالا كهرساكنا منتظما بين صفيحتين فلزيتين (P) و (P') متوازيتين تفصل بينهما المسافة d بسرعة $\vec{v}_0$ تكون زاوية α مع المحور الأفقي Ox .

توجد $\vec{v}_0$ في المستوى المعرف بـ $(O,\vec{i},\vec{j})$ (انظر الشكل جانبه).

نختار لحظة دخول البروتون إلى المجال $\vec{E}$ أصلا للتواريخ.



1 - أوجد إحداثيي متجهة القوة الكهربائية المطبقة على البروتون في المعلم المتعامد المنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2 - أوجد معادلة مسار البروتون وعين طبيعته.

3 - بين أن البروتون يصل إلى الصفيحة (P') عند لحظة t. احسب قيمة t.

4 - أوجد تعبير متجهة السرعة $\vec{v}$ عند وصول البروتون إلى الصفيحة (P') في المعلم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

5 - أوجد تعبير الإحداثي v_x لسرعة البروتون بدلالة x وتحقق من نتيجة السؤال السابق.

معطيات :

$$m = 1,67.10^{-27}kg \ , \ q = 1,6.10^{-19}C \ , \ d = 1cm$$

$$v_0 = 2.10^6 m.s^{-1} \ , \ \alpha = 10° \ , \ E = 5.10^4 V.m^{-1}$$

حـــل

1 - إحداثيا متجهة القوة الكهربائية

يخضع البروتون إلى القوة الكهربائية $\vec{F} = q.\vec{E}$

بإسقاط هذه العلاقة المتجهية على المحورين Ox وOy نحصل على :

$$\vec{F}\begin{vmatrix} F_x = -q.E \\ F_y = 0 \end{vmatrix}$$

في حالة $q > 0$ يكون لـ $\vec{F}$ و $\vec{E}$ نفس الاتجاه ونفس المنحى.

2 - تعبير معادلة المسار

يخضع البروتون أثناء حركته في المجال $\vec{E}$ إلى قوتين :

$\vec{P}$: وزنه ؛

$\vec{F}$: القوة الكهربائية

بإهمال P أمام F وتطبيق القانون الثاني لنيوتن نكتب :

$$m.\vec{a} = \vec{F} \quad \text{ومنه :} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

باعتبار إحداثيي $\vec{F}$ نكتب :

$$\vec{a}\begin{vmatrix} a_x = -\dfrac{q.E}{m} \\ a_y = 0 \end{vmatrix}$$

بما أن :
$$\begin{vmatrix} a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{q.E}{m} \\ a_y = \dfrac{dv_y}{dt} = 0 \end{vmatrix}$$
نحصل بالتكامل على :

$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = -\dfrac{q.E}{m}.t + k_1 \\ v_y = k_2 \end{vmatrix}$$
مع $k_1 = v_{0x} = v_0.\cos\alpha$ و $k_2 = v_{0y} = v_0.\sin\alpha$

أي أن :
$$\vec{v}\begin{vmatrix} v_x = -\dfrac{q.E}{m}.t + v_0\cos\alpha \\ v_y = v_0.\sin\alpha \end{vmatrix}$$

بما أن :
$$\begin{vmatrix} v_x = \dfrac{dx}{dt} = -\dfrac{qE}{m}.t + v_0.\cos\alpha \\ v_y = \dfrac{dy}{dt} = v_0.\sin\alpha \end{vmatrix}$$
نحصل بالتكامل على :

$$\begin{vmatrix} x = -\dfrac{1}{2}\dfrac{q.E}{m}t^2 + (v_0\cos\alpha).t + k_3 & (3) \\ y = (v_0\sin\alpha).t + k_4 & (4) \end{vmatrix}$$
مع $k_3 = 0$ و $k_4 = 0$ (الشروط البدئية)

بإقصاء t بين المعادلتين *(3)* و*(4)* نحصل على :
$$t = \frac{y}{v_0.\sin\alpha}$$

بالتعويض نحصل على :
$$x = -\frac{1}{2}\frac{q.E}{m}.\frac{y^2}{v_0^2\sin^2\alpha} + \frac{y}{\tan\alpha}$$

مسار البروتون عبارة عن شلجم لأن $x(t)$ تكتب على الشكل $x = a.y^2 + b.y + c$

3 ـ حساب لحظة وصول البروتون إلى الصفيحة (P')

عند وصول البروتون الى الصفيحة (P') يكون أفصوله هو $x = d$

باستعمال المعادلة الزمنية نحصل على :

$$d = -\frac{1}{2}\frac{q.E}{m}.t^2 + (v_0.\cos\alpha).t$$

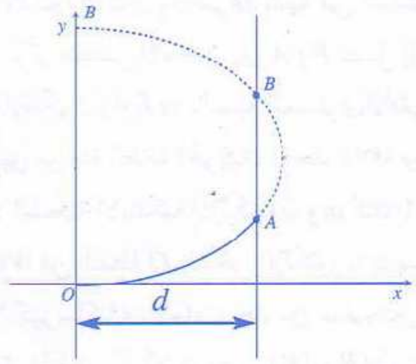
$$10^{-2} = -\left(\frac{0,5.1,6.10^{-19}.5.10^4}{1,67.10^{-27}}\right)t^2 + (2.10^6.\cos 10°)t$$

ومنه : $-2,40.10^{12}.t^2 + 1,97.10^6.t - 10^{-2} = 0$

بحل هذه المعادلة من الدرجة الثانية، نجد حلين t_1 و t_2 مع $t_2 > t_1$.

يمر لأول مرة البروتون من مستوى الصفيحة (P') عند اللحظة :

$t_1 \approx 5.10^{-9}s$



ـ توافق اللحظة t_1 وصول البروتون إلى النقطة A.

ـ توافق اللحظة t_2 الحل الرياضي دون اعتبار لوجود $\vec{E}$ فقط بين (P) و (P')

4 ـ تعبير متجهة السرعة $\vec{v}$

عند اللحظة t_1 يكون إحداثيا متجهة السرعة هما :

$$\vec{v}(t_1)\begin{cases} v_x = -\dfrac{qE}{m}.t_1 + v_0.\cos\alpha \\ v_y = v_0.\sin\alpha \end{cases}$$

أي أن :

$$\vec{v}(t_1)\begin{cases} v_x = \dfrac{-1,6.10^{-19}.5.10^4}{1,67.10^{-27}}5.10^{-9} + 2.10^5\cos 10° = 1,94.10^6 m.s^{-1} \\ v_y = 2.10^6.\sin 10° = 3,47.10^5 m.s^{-1} \end{cases}$$

5 ـ تعبير v_x بدلالة x

بما أن تسارع البروتون ثابت وفق المحور Ox ، نطبق العلاقة المستقلة عن الزمن بين اللحظتين : $t_0 = 0$ و t.

$v_x^2 - v_{0x}^2 = 2.a_x(x - x_0)$ مع $x_0 = 0$ و $v_{0x} = v_0.\cos\alpha$

و $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = -\dfrac{q.E}{m}$

إذن : $v_x^2 = v_0^2\cos^2\alpha - \dfrac{2qE}{m}.x$ ومنه : $v_x = \sqrt{v_0^2.\cos^2\alpha - \dfrac{2qE}{m}.x}$

التحقق من قيمة v_x عند $x = d$

$$v_x = \sqrt{v_0^2.\cos^2\alpha - \frac{2qE}{m}.d} = \sqrt{(2.10^6\cos 10°)^2 - \frac{2.1,6.10^{-19}.5.10^4.10^{-2}}{1,67.10^{-27}}} \approx 1,95.10^6 m.s^{-1}$$