بسم الله الرحمان الرحيم

سلسلة تمارين في الميكانيك -قوانين نيوتن+الدوران (خاصة بتلاميذ العلوم الرياضية والفيزيائية)

1 –التمرين الأول :

نعتبر سكة $ABCDE$ في مستوى رأسي مكونة من أربعة أجزاء.

– الجزءان AB و BC مستقيمان ومائلان بزاوية α بالنسبة للمستوى الأفقي.

– الجزء CD مستقيمي وأفقي.

– الجزء DE نصف دائري شعاعه $r'=32cm$ ومركزه O

نثبت جسما S_1 كتلته $m_1=0,9kg$ في طرف خيط كتلته مهملة وغير قابل للامتداد.

نلف الطرف الاخر للخيط حول مجرى بكرة شعاعها $r=10cm$ وعزم قصورها، بالنسبة حور تماثلها هو $J_\Delta=10^{-3}kg.m^2$. نعتبر أن البكرة قابل للدوران حول محور (Δ) أفقي منطبق مع محور تماثلها، بدون احتكاك، وأن الجسم S_1 ينزلق فوق السكة بدون احتكاك عدا فوق الجزء BC. نعطي: $\alpha = 30°$; $g = 10m.s^{-2}$; $AB = 1m$.

نحرر المجموعة بدون سرعة بدئية، فينزلق S_1 فوق AB وفي نفس الوقت تدور البكرة حول المحور Δ.

1– عبر عن السرعة V_B للجسم S_1 عند مروره من النقطة B بدلالة m_1 و r و J_Δ و α و AB و g احسب V_B.

2– عند لحظة مرور S_1 من النقطة B ينفصل الخيط عن S_1 ويتابع هذا الأخير حركته فوق السكة فيمر من النقطة C بسرعة $V_C=V_B=3m.s^{-1}$.

2–1– بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك، عبر عن معامل الاحتكاك K بين S_1 والجزء BC بدلالة α احسب K.

2–2– استنتج شدة القوة $\vec{R}$ التي يطبقها الجزء BC على S_1 أثناء حركته.

3– يتابع الجسم S_1 حركته بنفس السرعة V_C فوق الجزء الأفقي CD.

3–1– عبر عن سرعة S_1 في نقطة M من السكة ممعلمة بالزاوية $\theta =(OD;OM)$ بدلالة V_C و r' و θ و g .

3–2– عبر عن شدة القوة $\vec{R}$ التي تطبقها السكة على S_1 عند M بدلالة V_C و r' و θ و g و m_1.

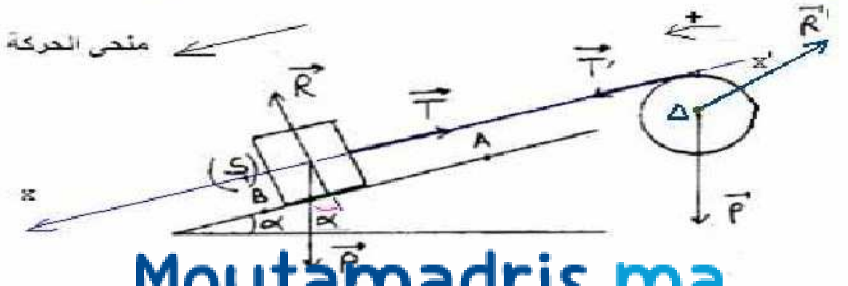
3–3– حدد النقطة التي يغادر عندها S_1 السكة علما أن سرعته عند النقطة D تأخذ القيمة $V_2=4m.s^{-1}$

***

تصحيح:

1 - بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن على الجسم S_1 بين A وB :

$v_B^{\ 2}-v_A^{\ 2}=2.a.AB$ مع $v_A=0$ $\Leftarrow$ $v_B=\sqrt{2.a.AB}$ (1)



بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة : $\Sigma M\vec{F}_{/\Delta} = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$ أي : $0+0+T'.r = J_{\Delta}.\ddot{\theta}$ ومنه : $\boxed{T'. = \dfrac{J_{\Delta}.\ddot{\theta}}{r}}$ **(a)**

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S_1 لدينا : $\Sigma\vec{F} = m_1.\vec{a}_G$ أي : $\vec{P}_1 + \vec{R} + \vec{T} = m_1.\vec{a}_G$ بالإسقاط على المحور **x'x** :

$-P_1.\sin\alpha + 0 + T = m_1.a$ ومنه : $+P_1.\sin\alpha + 0 - T = m_1.a$ وبما أن الخيط غير قابل للمد فإن : $T' = T$ ومنه :

$+m_1.g.\sin\alpha - \dfrac{J_{\Delta}.\ddot{\theta}}{r} = m_1.a$ ونعلم أن : $a = r.\ddot{\theta}$ $\Leftarrow$ $\ddot{\theta} = \dfrac{a}{r}$ العلاقة السابقة تصبح : $m_1.\sin\alpha - \dfrac{J_{\Delta}.a}{r^2} = m_1.a$

$a(\dfrac{J_{\Delta}}{r^2} + m_1) = m_1.g.\sin\alpha$ ومنه : $a = \dfrac{m_1.g.\sin\alpha}{\dfrac{J_{\Delta}}{r^2} + m_1}$ وبالتعويض في العلاقة **(1)** $\boxed{v_B = \sqrt{\dfrac{2.m_1.g.\sin\alpha.AB}{m_1 + \dfrac{J_{\Delta}}{r^2}}}}$

تطبيق عددي: $\boxed{v_B = \sqrt{\dfrac{2\times0,9\times10.\sin30\times.1}{0,9 + \dfrac{10^{-3}}{0,1^2}}} = 3m/s}$

أو بطريقة أخرى :

نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على (S_1) بين اللحظتين t_A و t_B :

$\frac{1}{2}m_1V_B^2 - \frac{1}{2}m_1V_A^2 = \Sigma W(\vec{F})$ $\Leftarrow$ $\frac{1}{2}m_1(V_B^2 - V_A^2) = W(\vec{P}) + W(\vec{R}) + W(\vec{T})$

* نطبق مبرهنة الطاقة الحركية على البكرة بين اللحظتين t_A و t_B :

$$\frac{1}{2}J_{\Delta}\omega_B^2 - \frac{1}{2}J_{\Delta}.\omega_A^2 = W(\vec{P'}) + W(\vec{T'}) + W(\vec{R'})$$

وبتعويض $W(T)$ بقيمته في العلاقة (1)، نحصل على : $\frac{1}{2}m_1V_B^2 = m_1g\sin\alpha - \frac{1}{2}J_{\Delta}\omega_B^2$

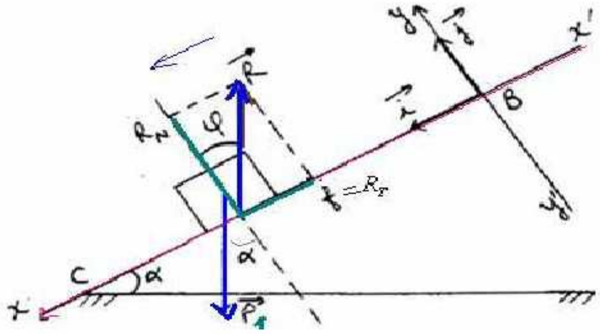
وبما أن الخيط لا ينزلق على مجرى البكرة وغير قابل للامتداد، فإن : $r\omega_B = V_B$

$\frac{1}{2}mV_B^2 + \frac{1}{2}J_{\Delta}.\frac{V_B^2}{r^2} = m_1.g.AB.\sin\alpha$ $\Longleftarrow$ $\frac{1}{2}V_B^2(m_1 + \frac{J_{\Delta}}{r^2}) = m_1gAB\sin\alpha$

ومنه : $V_B = \sqrt{\dfrac{2m_1g.AB.\sin\alpha}{m_1 + \frac{J_{\Delta}}{r^2}}} = \sqrt{\dfrac{2.0,9.10.\sin30^\circ}{0,9 + \frac{10^{-3}}{(0,1)^2}}} = 3,0\,m.s^{-1}$

-2 **2-1** بما أن الجسم S_1 يصل إلى النقطة **C** بسرعة $V_C = V_B = 3m/s$ فإن حركته على الجزء **BC** مستقيمية منتظمة :أي تسارعه منعدم .

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن : $\Sigma\vec{F} = \vec{0}$ وبما ان الاحتكاكات غير مهملة بين **B** و**C** فإن القوة $\vec{R}$ المقورة بتاثير سطح التماس مائلة فيعكس منحى الحركة ولها مركبتين ، مماسية $f = R_T$ ومنظمية R_N . انظر الشكل .



وبذلك يصبح لدينا : $\vec{P}_1 + \vec{R} = \vec{0}$ المجموعة شبه معزولة ينطبق عليها مركز القصور .

بالاسقاط على المحور **x'x**: $+P_1.\sin\alpha - R_T = 0$ $\Leftarrow$ $R_T = m_1.g.\sin\alpha$

بالاسقاط على المحور **y'y**: $-P_1.\cos\alpha + R_N = 0$ $\Leftarrow$ $R_N = m_1.g.\cos\alpha$

ومعامل الاحتكاك : $k = tg\varphi = \dfrac{R_T}{R_N} = \dfrac{m_1.g.\sin\alpha}{m_1.g.\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\alpha = tg30 = 0,58$ ومنه : $\varphi = \alpha = 30°$

****

2-2 - $R = \sqrt{R_T^{\,2} + R_N^{\,2}} = \sqrt{(m_1.g.\sin\alpha)^2 + (m_1.g.\cos\alpha)^2} = m_1.g = 0,9.10 = 9N$ أو من خلال العلاقة :

$\vec{P}_1 + \vec{R} = \vec{0}$ $\Leftarrow$ $R = P_1 = m_1.g = 9N$

****

-3 **1-3** بتطبيق مبرهنة الطاقة ... على الجسم S_1 بين ...

$$\Delta E_{C}{}_{D\to M} = \Sigma W\vec{F}_{D\to M}$$ أي : $\Delta E_{C}{}_{D\to M} = W\vec{P_1}_{D\to M} + W\vec{R}_{D\to M}$ $\Leftarrow$ $E_{C M} - E_{C D} = m_1.g(z_D - z_M) + 0$ **(b)**

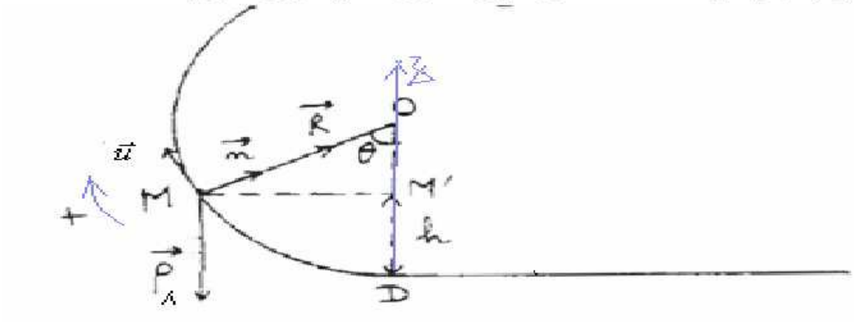
ولدينا : $z_D = 0$ و : $z_M = DM' = h = r' - r'\cos\theta = r'(1-\cos\theta)$ $\Leftarrow$ $z_D - z_M = 0 - r'(1-\cos\theta) = -r'(1-\cos\theta)$

بالتعويض في **(b)** $\frac{1}{2}m_1(v_M{}^2 - v_D{}^2) = -m_1.g.r(1-\cos\theta)$

أي: $v_M{}^2 - v_D{}^2 = -2.g.r'(1-\cos\theta)$ وبما أن : $v_D = v_C$: $v_M = \sqrt{v_C{}^2 - 2.g.r'(1-\cos\theta)}$

****

2-3 - باعتبار معلم فيريني $(o,\vec{u},\vec{n})$ في النقطة **M** . وبتطبيق القانون الثاني لنيوتن على S_1.



$\vec{P_1} + \vec{R} = m_1.\vec{a}_G$ بالإسقاط على المنظمي : $R - P_1.\cos\theta = m_1.\frac{v_M{}^2}{r'}$ ومنه : $R = m_1.g.\cos\theta + m_1.\frac{v_M{}^2}{r'}$

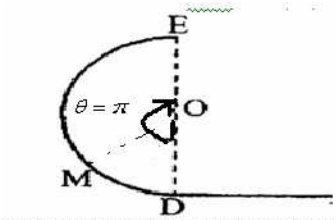
ولدينا من خلال السؤال السابق: $v_M{}^2 = v_D{}^2 - 2.g.r'(1-\cos\theta)$ $\Leftarrow$ $R = m_1.g.\cos\theta + m_1.\left[\frac{v_D{}^2}{r'} - 2.g(1-\cos\theta)\right]$

$$R = m_1.g.\cos\theta + m_1\frac{v_D{}^2}{r'} - 2.m_1.g + 2.m_1.g.\cos\theta \Leftarrow R = 3m_1.g.\cos\theta + m_1\frac{v_C{}^2}{r'} - 2.m_1.g = m_1.g\left[.3\cos\theta - 2 + \frac{v_D{}^2}{r'.g}\right]$$

عند مغادرة المستوى المائل يكون تأثير السكة منعدما : $R = 0$ و $v_D = v_2 = 4m/s$

زمنه : $3.\cos\theta - 2 + \frac{v_2{}^2}{r'.g} = 0$ ومنه : $\cos\theta = \frac{2}{3} - \frac{v_2{}^2}{3.r'.g} = \frac{2}{3} - \frac{4^2}{3\times0,32\times10.} = -1$ $\Leftarrow$ $\theta = \pi$

الجسم يغادر السكة عند النقطة **E**.

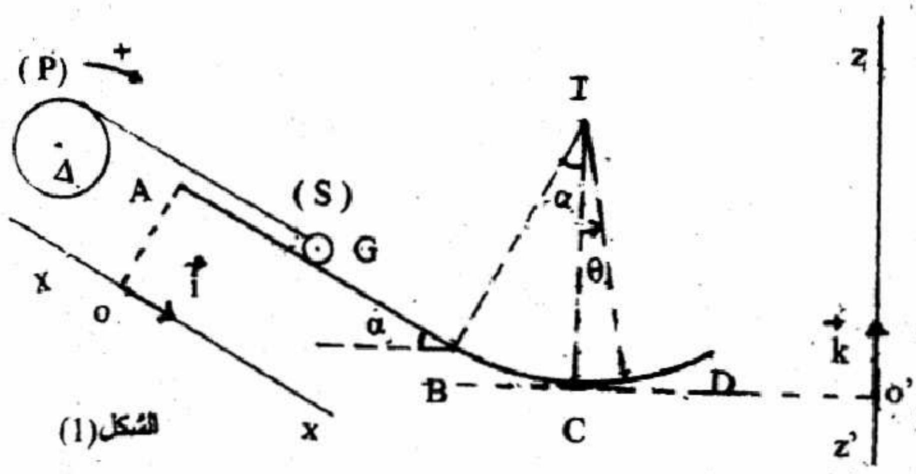


2 –التمرين الثاني :

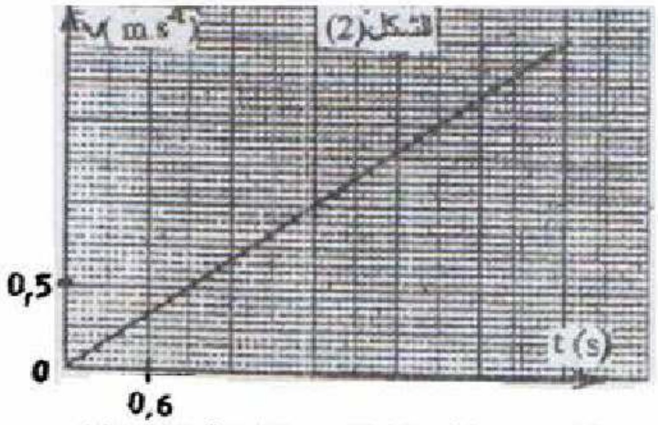
نعتبر المجموعة الممثلة في الشكل(1) حيث

– (P) بكرة متجانسة شعاعها r = 5cm قابلة للدوران في مستوى رأسي حول محور أفقي (Δ) ثابت يمر من مركزها. عزم قصور البكرة بالنسبة للمحور (Δ) هو $J_\Delta = 2.10^{-3}kg.m^2$.

– (S) كرية صلبة مركز قصورها G كتلتها m = 0,1kg مرتبطة بطرف خيط غير قابل للامتداد و كتلته مهملة ملفوف حول مجرى البكرة. يمكن للكرية(S) أن تنزلق على سكة ABCD أسية، هذه السكة مكونة من جزء مستقيمي AB مائل بالزاوية $\alpha = 30°$ بالنسبة للمستوى الأفقي و جزء BCD من دائرة مركزها I و شعاعها R=1m. نعتبر أن الاحتكاكات على السكة مهملة و أن الخيط لا ينزلق على مجرى البكرة وناخذ $g=10m.s^{-2}$.



1– نحرر المجموعة في لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ t = 0، فتنزلق الكرية بدون سرعة بدئية من الموضع A الذي يطابق أصل المعلم $(O,\vec{i})$ وتمر في اللحظة ذات التاريخ $t_1=2.7s$ من الموضع B بالسرعة v_B. نعلم موضع G في كل لحظة بالأفصول x



في المعلم $(O,\vec{i})$.

يمثل المنحنى في الشكل(2) تغيرات سرعة G بدلالة الزمن.

1.1- حدد طبيعة حركة كل من (S) و(P).

1.2- حدد قيمة v_B.

2- تنفصل الكرية،عند مرورها من الموضع B في التاريخ t_1، عن الخيط فتتوقف البكرة (P) بعد انجازها 10دورات ابتداء من التاريخ t_1.

2.1- لحسب السرعة الزاوية للبكرة في التاريخ t_1.

2.2- علما أن البكرة تخضع لمزدوجة مقاومة عزمها M ثابت.

لحسب قيمة M.

3- بعد انفصالها عن الخيط تنزلق الكرية على الجزء BCD من السكة ، حيث ندرس حركة مركز قصورها G. نأخذ $IG \approx R$.

3.1- بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية،أوجد تعبير v_C سرعة الكرية عند مرورها بالموضع C بدلالة R و g و α و V_B.

لحسب قيمة v_C.

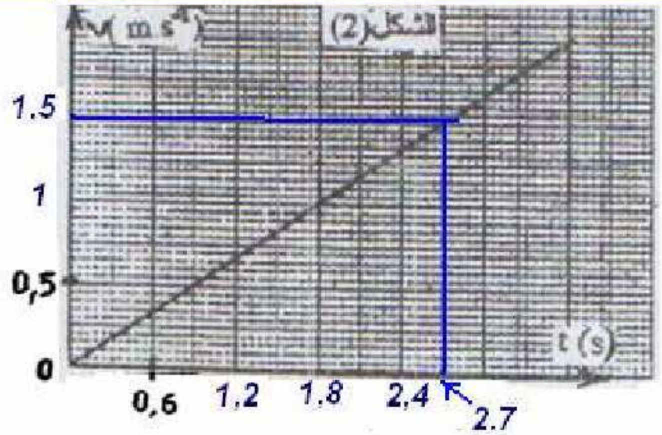
3.2- بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك،أوجد تعبير شدة القوة $\vec{F}$ التي تؤثر بها السكة BCD على الكرية في الموضع C، بدلالة m وR وg وv_C. لحسب F.

****

تصحيح

1- 1-1--حركة S مستقيمية متغيرة بانتظام متسارعة بينما حركة البكرة P دورانية متغيرة بانتظام.

1-2- بما أ ن الجسم يمر من الموضع B عند اللحظة t=2,7s بالسرعة v_B نجد مبيانيا :



نجد $v_B = 1,5 m/s$

أو من خلال الشكل 2 منحنى v بدلالة t مستقيم يمر من أصل المعلم إذن : $v = k.t$ مع : $k = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{1-0}{1,8-0} = \frac{5}{9} \approx 0,56$

ومنه : $v = 0,56t$ إذن : $a = \frac{dv}{dt} = 0,56 m/s^2$. $v_B = \frac{5}{9}.t = \frac{5}{9} \times 2,7 = 1,5 m/s$

2-1- - $\omega_1 = \frac{v_B}{r} = \frac{1,5}{0,05} = 30 rad/s$.

2-2 – بتطبيق العلاقة المستقلة عن الزمن على البكرة بين لحظة انفلات الحبل ولحظة التوقف :

$\omega_f^2 - \omega_i^2 = 2.\ddot{\theta}.\Delta\vartheta$ مع : $\omega_f = 0$ و: $\Delta\theta = 2.\pi.n$ $\Leftarrow$ $-\omega_i^2 = 4.\ddot{\theta}.\pi.n$ $\Leftarrow$ $\ddot{\theta} = \frac{-\omega_1^2}{4\pi.n}$

بتطبيق العلاقة الأساسية للتحريك على البكرة : $\Sigma M\vec{F}_{/\Delta} = J_\Delta.\ddot{\theta}$ أي : $M\vec{P} + M\vec{R} + M = J_\Delta.\ddot{\theta}$ أي : $0 + 0 + M = J_\Delta.\ddot{\theta}$

ومنه : $M = -\frac{J_\Delta.\omega_1^2}{4\pi.n} = -\frac{2.10^{-3} \times 30^2}{4\pi.10} = -1,4.10^{-2} N.m$

الطريقة الثانية :

*بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على البكرة بين لحظة انفلات الحبل ولحظة التوقف :

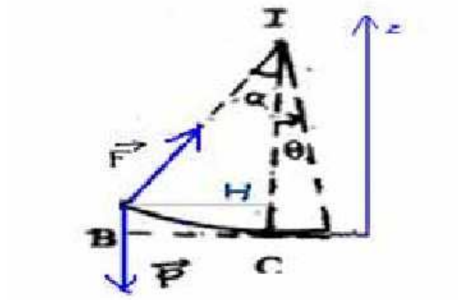
$E_{C.f} - E_{C.i} = \underset{i\to f}{W\vec{P}} + \underset{i\to f}{W\vec{R}} + \underset{i\to f}{W(Cfrott)}$ $\Leftarrow$ $0 - \frac{1}{2}J_\Delta.\omega_i^2 = 0 + 0 + M.\Delta\theta$ مع : $\Delta\theta = 2.\pi.n$

ومنه : $M = -\frac{J_\Delta.\omega_1^2}{4\pi.n} = -\frac{2.10^{-3} \times 30^2}{4\pi.10} = -1,4.10^{-2} N.m$

3- بتطبيق مبرهنة الطاقة الحركية على الكرية بين B و C. $\underset{B\to C}{\Delta E_C} = \underset{B\to C}{\Sigma W\vec{F}}$

$$E_{CC}-E_{CB}=\underset{B\to C}{W\vec{P}}+\underset{B\to C}{W\vec{F}}$$

$z_B=r-r\cos\alpha$ **: و** $z_C=0$ **: مع** $\qquad E_{CC}-E_{CB}=mg(z_B-z_C)+0$



$\frac{1}{2}m.v_C^2-\frac{1}{2}m.v_B^2=m.gR.(1-\cos\alpha)$ $\Leftarrow$ $.v_C^2-.v_B^2=2.gR.(1-\cos\alpha)$ **ومنه :** $.v_C=\sqrt{v_B^2+2.gR.(1-\cos\alpha)}$

ت.ع: $.v_C=.\sqrt{(1,5)^2+2.\times10\times1.(1-\cos30)}=2,22m/s$

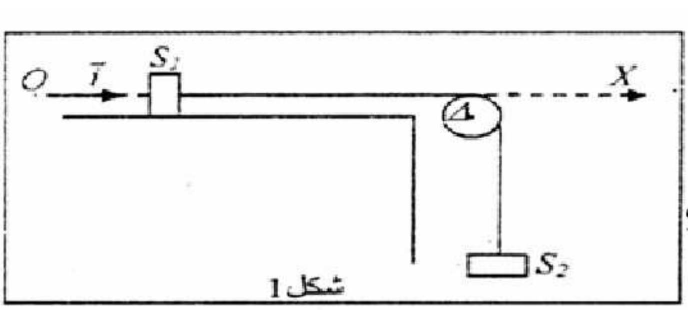
3-2- بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الكرية على الجزء BCD $\quad \Sigma\vec{F}=m.\vec{a}_G$

تخضع الكرية لوزنها: $\vec{P}$ **وللقوة :** $\vec{F}$ **المطبقة من طرف سطح التماس وهي عمودية على السطح .**

$\vec{F}+\vec{P}=m.\vec{a}_G$ **بالاسقاط على المنظمي :** $F-P=m.\frac{v_c^2}{R}$ $\Leftarrow$ $F=m(g+\frac{v_c^2}{R})=0,1\times\left[10+\frac{(2,22)^2}{1}\right]=1,49N$

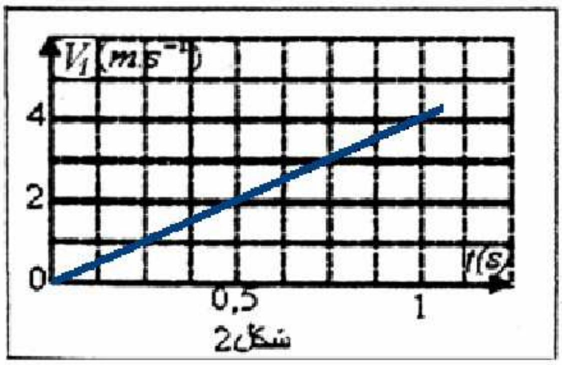
---

3) التمرين الثالث :



1- تتكون المجموعة الممثلة في الشكل 1 من:

- جسم صلب S_1 كتلته M_1 ينزلق بدون احتكاك فوق منضدة أفقية.
- جسم صلب S_2 كتلته M_2 مرتبط بالجسم S_1 بواسطة خيط غير قابل للامتداد وكتلته مهملة.
- بكرة (P) كتلتها M وشعاعها R قابلة للدوران بدون احتكاك حول محورها (Δ) ويمر عبر مجراها الخيط الذي نعتبره لا ينزلق خلال الحركة. نحرر المجموعة عند اللحظة $t=0s$ بدون سرعة بدئية بحيث ينطلق الجسم S_1 من نقطة أفصولها على المحور $\overline{OX}$ هو $0,5cm$ ونحدد تجريبيا تغير V_1 سرعة S_1 بدلالة الزمن فنحصل على الشكل 2.



1-1- اكتب التعبير العددي ل V_1 بدلالة الزمن.

1-2- استنتج طبيعة حركة S_1 وأعط معادلتها الزمنية $x=f(t)$.

1-3- بين أن ل S_1 و S_2 نفس التسارع a.

1-4- بتطبيق العلاقة الأساسية للديناميك على كل من S_1 و S_2 و (P) ، أوجد العلاقة بين التسارع a وشدة الثقالة g. نعطي: عزم قصور البكرة $J_\Delta=\frac{1}{2}MR^2$ بالنسبة للمحور (Δ) و $M_1=M_2=M$.

****

تصحيح التمرين الثالث:

1.1_ حسب مبيان الشكل-2- الدالة $V_1=f(t)$ عبارة عن دالة خطية : $V_1 = K.t$

حيث K المعامل الموجه للمستقيم : $K=\frac{\Delta V_1}{\Delta t}=\frac{4-0}{1-0}=4\ m.s^{-2}$

2.1 _ المسار مستقيمي و التسارع ثابت السرعة تزايدية .

إذن الحركة مستقيمية متسارعة بانتظام ، معادلتها الزمنية :

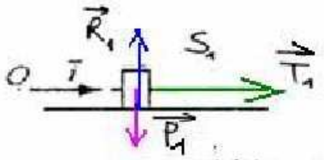
$x=\frac{1}{2}a_1t^2+V_0.t+x_0$. نحدد الثوابت x_0 و V_0 انطلاقا من الشروط البدئية

عند $t=0$ ، تكون : $V_0=0$ و $x_0= 0,5cm$ إذن : $\boxed{x=2t^2+5.10^{-3}}$

3.1 - بما أن الخيط الرابط بين (S_1) و (S_2) غير قابل للامتداد ، فإنه عند انتقال S_1 بالمسافة x_1 ينتقل (S_2) بالمسافة x_2 حيث : $x_1=x_2$ في كل لحظة .

نشتق x_1 و x_2 بالنسبة للزمن ، $\ddot{x}_1=\ddot{x}_2 \Leftarrow \dot{x}_1=\dot{x}_2$

أي أن : $a_1=a_2=a=4m.s^{-2}$



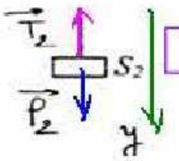
لـ (S_1) و (S_2) نفس السرعة ونفس التسارع في كل لحظة .

المجموعة المدروسة { الجسم S_1 } يخضع (S_1) خلال حركته لـ :

$\vec P_1$: وزنه .

$\vec R_1$: تأثير السطح الأفقي

$\vec T_1$: تأثير الخيط (1)



بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على S_1 : $\vec P_1+\vec R_1+\vec T_1=M_1\vec a$ نسقط على $x'x$: $\boxed{T_1=M_1a}$

المجموعة المدروسة { الجسم S_2 } تخضع (S_2) خلال حركته لـ :

$\vec P_2$: وزنه

$\vec T_2$: تأثير الخيط (2)

بتطبيق القانون الثاني لنيوتن على الجسم S_2 : $\vec P_2+\vec T_2=M\vec a$

نسقط هذه العلاقة على $y'y$: $M_2g-T_2=Ma$ $\boxed{T_2=M_2g-Ma}$

المجموعة المدروسة { البكرة }

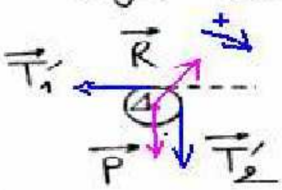
تخضع البكرة أثناء دورانها حول المحور (Δ) لـ :

$\vec P$: وزنها .

$\vec R$: تأثير محور الدوران .

$\vec T'_1$: تأثير الخيط (1)

$\vec T'_2$: تأثير الخيط (2)



: $\mathcal{M}_\Delta(\vec P)+\mathcal{M}_\Delta(\vec R)+\mathcal{M}_\Delta(\vec T'_1)+\mathcal{M}_\Delta(\vec T'_2)=J_\Delta.\ddot\theta$ مع : $\mathcal{M}_\Delta(\vec R)=0$ و $\mathcal{M}_\Delta(\vec P)=0$

$J_\Delta.\ddot\theta=rT'_2-rT'_1$ الخيط غير قابل للمد ⇐ $T'_1=T_1$ و $T'_2=T_2$

الخيط لا ينزلق على البكرة : $\ddot\theta=\frac{a}{r}$

نحصل على : $J_\Delta\cdot\frac{a}{r}=rM_2(g-a)-rM_1a$

$$a\left(\frac{J_\Delta}{r^2}+M_2+M_1\right)=M_2g$$

$$\boxed{a=\frac{M_2}{\frac{J_\Delta}{r^2}+M_2+M_1}\cdot g}$$

مع : $M_1=M_2=M$ و $J_\Delta=\frac{1}{2}Mr^2$

نكتب : $a=\frac{M}{5.\frac{M}{2}}\cdot g=\frac{2}{5}g.$