تمارين محلولة: الدوال اللوغاريتمية والدوال الآسية

التمرين 1

حل في IR كل من المعادلات التالية :

1) $(\ln x)^2 - 2\ln x = 0$ 2) $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$

3) $(\ln x)^3 - 27 = 0$ 4) $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$

الحل

1) لنحل المعادلة $(\ln x)^2 - 2\ln x = 0$.

$$(\ln x)^2 - 2\ln x = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 2)\ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x = 2 \text{ أو } \ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = e^2 \text{ أو } x = 1$$

إذن $S_1 = \{1; e^2\}$

2) لنحل المعادلة $(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$.

لدينا حلي المعادلة $x^2 + x - 2 = 0$ هما 1 و 2- ، إذن :

$$(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \text{ أو } \ln x = -2$$
$$\Leftrightarrow x = e \text{ أو } x = e^{-2}$$

إذن $S_2 = \{e; e^{-2}\}$

3) لنحل المعادلة $(\ln x)^3 - 27 = 0$.

لدينا : $x^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

إذن : $(\ln x)^3 - 27 = 0 \Leftrightarrow \ln x = 3$

$$\Leftrightarrow x = e^3$$

إذن $S_3 = \{e^3\}$

4) لنحل المعادلة $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0$.

لدينا : $x^3 - 2x^2 + x - 2 = (x^3 - 2x^2) + (x - 2)$
$$= x^2(x - 2) + (x - 2)$$
$$= (x - 2)(x^2 + 1)$$

إذن $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ln x - 2)(\ln^2 x + 1) = 0$
$$\Leftrightarrow \ln x = 2$$
$$\Leftrightarrow x = e^2$$

إذن $S_4 = \{e^2\}$

التمرين 2

حل في IR كل من المتراجحات التالية :

1) $\ln(2x + 3) > 0$ 2) $\ln(2x - 1) < 0$

3) $\ln(x + 2) + \ln(x - 1) \le 2\ln 2$ 4) $\ln[(x - 2)(x + 1)] \ge \ln 4$

5) $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \ge 0$ 6) $\ln(x - 1) + \ln(x - 3) < \ln 2$

الحل

1) لنحل المتراجحة التالية $\ln(2x + 3) > 0$

$$\ln(2x + 3) > 0 \Leftrightarrow 2x + 3 > 1$$
$$\Leftrightarrow x > -1$$

إذن $S_1 =]-1, +\infty[$

2) لنحل المتراجحة التالية $\ln(2x - 1) < 0$

$$\ln(2x - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < 2x - 1 < 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < x < 1$$

إذن $S_2 = \left]\frac{1}{2}; 1\right[$

3) لنحل المتراجحة $\ln(x + 2) + \ln(x - 1) \le 2\ln 2$

• شروط وجود المتراجحة هي $x + 2 > 0$ و $x - 1 > 0$ أي $x > 1$

•
$$\ln(x + 2) + \ln(x - 1) \le 2\ln 2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ \ln[(x + 2)(x - 1)] \le \ln(2^2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 2 \\ (x + 2)(x - 1) \le 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 + x - 6 \le 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ -3 \le x \le 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 1 < x \le 2$$

إذن $S_3 =]1; 2]$

4) لنحل المتراجحة $\ln[(x + 2)(x - 1)] \ge \ln 4$

• شروط وجود المتراجحة هي $(x + 2)(x - 1) > 0$

أي $x \in]-\infty, -2[\, \cup\,]1, +\infty[$

•
$$\ln[(x + 1)(x - 2)] \ge \ln 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -2[\, \cup\,]1, +\infty[\\ (x + 1)(x - 2) \ge 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -2[\, \cup\,]1, +\infty[\\ x^2 - x - 6 \ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty; -2[\, \cup\,]1; +\infty[\\ (x - 3)(x + 2) \ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -2[\, \cup\,]1, +\infty[\\ x \in]-\infty, -2]\, \cup\, [3, +\infty[\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \in [3, +\infty[$$

إذن $S_4 = [3; +\infty[$

5) لنحل المتراجحة $\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \ge 0$

• شروط وجود المتراجحة هي $\frac{x+1}{x-1} > 0$ و $x - 1 \ne 0$

أي $x \in]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[$

$$\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[\\ \frac{x+1}{x-1} \ge 1 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[\\ \frac{x+1}{x-1} - 1 \ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[\\ \frac{2}{x-1} \ge 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, -1[\, \cup\,]1, +\infty[\\ x \in]1, +\infty[\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$$

إذن $S_5 =]1; +\infty[$

6) لنحل المتراجحة $\ln(x - 1) - \ln(x - 3) < \ln 2$

• شروط وجود المتراجحة هي $x - 1 > 0$ و $x - 3 > 0$ أي $x > 3$

•
$$\ln(x - 1) + \ln(x - 3) < \ln 2$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ \ln[(x - 1)(x - 3)] < \ln(2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ (x - 1)(x - 3) < 2 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x^2 - 4x + 1 < 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 2 - 3 < x < 2 + 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow 3 < x < 2 + 3$$

إذن $S_6 =]3; 2 + 3[$

التمرين 3

حل في IR كل من المتراجحات التالية :

1) $(\ln x)^2 - 2\ln x < 0$ 2) $(\ln x)^2 + \ln x - 2 < 0$

3) $(\ln x)^3 - 27 \ge 0$ 4) $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 \le 0$

الحل

1) لنحل المتراجحة $(\ln x)^2 - 2\ln x > 0$

$$(\ln x)^2 - 2\ln x < 0 \Leftrightarrow (\ln x - 2)\ln x < 0$$
$$\Leftrightarrow 0 < \ln x < 2$$
$$\Leftrightarrow 1 < x < e^2$$

إذن $S_1 =]1; e^2[$

2) لنحل المتراجحة $(\ln x)^2 + \ln x - 2 < 0$

$$(\ln x)^2 + \ln x - 2 < 0 \Leftrightarrow (\ln x - 1)(\ln x + 2) < 0$$
$$\Leftrightarrow -2 < \ln x < 1$$
$$\Leftrightarrow e^{-2} < x < e$$

إذن $S_2 =]e^{-2}; e[$

3) لنحل المتراجحة $(\ln x)^3 - 27 \ge 0$

$$(\ln x)^3 - 27 \ge 0 \Leftrightarrow (\ln x)^3 \ge 3^3$$
$$\Leftrightarrow \ln x \ge 3$$
$$\Leftrightarrow x \ge e^3$$

إذن $S_3 =]e^3; +\infty[$

4) لنحل المتراجحة $(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 \le 0$

$$(\ln x)^3 - 2(\ln x)^2 + \ln x - 2 \le 0 \Leftrightarrow (\ln x - 2)(\ln^2 x + 1) \le 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x - 2 \ge 0$$
$$\Leftrightarrow \ln x \ge 2$$
$$\Leftrightarrow x \ge e^2$$

إذن $S_4 =]e^2; +\infty[$

التمرين 4

حدد أصغر عدد صحيح طبيعي n حيث :

1) $(1{,}05)^n \ge 2$ 2) $(0,95)^n \le 0,2$ 3) $\left(\frac{1}{3}\right)^n \ge 10^{-6}$

الحل

1) لنحل المتراجحة $(1,05)^n \ge 2$

$$(1{,}05)^n \ge 2 \Leftrightarrow \ln[(1{,}05)^n] \ge \ln 2$$
$$\Leftrightarrow n\ln(1,05) \ge \ln 2$$
$$\Leftrightarrow n \ge \frac{\ln 2}{\ln(1,05)} \quad (\text{لأن } \ln(1,05) > 0)$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\frac{\ln 2}{\ln(1,05)} \approx 14,206$

إذن $n = 15$

2) لنحل المتراجحة $(0,95)^n \le 0,2$

$$(0,95)^n \le 0,2 \Leftrightarrow \ln[(0,95)^n] \le \ln(0,2)$$
$$\Leftrightarrow n\ln(0,95) \le \ln(0,2)$$
$$\Leftrightarrow n \ge \frac{\ln(0,2)}{\ln(0,95)} \quad (\text{لأن } \ln(0,95) < 0)$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\frac{\ln(0,2)}{\ln(0,95)} \approx 31,377$

إذن $n = 32$

3) لنحل المتراجحة $\left(\frac{1}{3}\right)^n \ge 10^{-6}$

$$\left(\frac{1}{3}\right)^n \le 10^{-6} \Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] \le \ln(10^{-6})$$
$$\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{3}\right) \le -6\ln(10)$$
$$\Leftrightarrow -n\ln 3 \le -6\ln 10$$
$$\Leftrightarrow n \ge \frac{6\ln(10)}{\ln(3)}$$

باستعمال الآلة الحاسبة نجد $\frac{6\ln(10)}{\ln(3)} \approx 12,575$

إذن $n = 13$

التمرين 5

أحسب النهايات التالية :

$\lim_{x\to+\infty}(x - \ln x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}(x - x\ln x)$ ، $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x} - \ln x)$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{1 + \ln x}{2 - \ln x}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{x + \ln x}{x - \ln x}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+2}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^3}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}$

الحل

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}(x - \ln x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) = +\infty$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}(x - x\ln x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}(x - x\ln x) = \lim_{x\to+\infty} x(1 - \ln x) = -\infty$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}(x - \ln x)$:

$$\lim_{x\to+\infty}(x - \ln x) = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \frac{2\ln x}{x}\right) = +\infty$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{1 + \ln x}{2 - \ln x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1 + \ln x}{2 - \ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x\left[\frac{1}{\ln x} + 1\right]}{\ln x\left[\frac{2}{\ln x} - 1\right]} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\ln x} + 1}{\frac{2}{\ln x} - 1} = -1$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{x + \ln x}{x - \ln x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x\left[1 + \frac{\ln x}{x}\right]}{\left[1 - \frac{\ln x}{x}\right]} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1 + \frac{\ln x}{x}}{1 - \frac{\ln x}{x}} = 1$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right)$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x}\right) &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x}{x}\right)\\ &= \lim_{x\to+\infty}(2) = 2\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) = \ln 2$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{x} = 0 \times 1 = 0$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+2}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{x+2} = 0 \times 1 = 0$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x+1)}{x+1}\times\frac{x+1}{x^2} = 0 \times 0 = 0$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^3}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}\times\frac{x^2+1}{x^3} = 0 \times 0 = 0$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left[x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right]}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2\ln x}{x} + \frac{1}{x}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)\right] = 0$$

التمرين 6

أحسب النهايات التالية :

$\lim_{x\to0, x>0}(x - \ln x)$ ، $\lim_{x\to0, x>0} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$ ، $\lim_{x\to1, x<1}\ln(1 - x)$

$\lim_{x\to0, x>0}\frac{1 + \ln x}{2 - \ln x}$ ، $\lim_{x\to0, x>0}\frac{x + \ln x}{x - \ln x}$ ، $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{x^2+2}\right)$

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + 2x)}{x}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 - 3x)}{x}$ ، $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + x)}{x^3}$

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + 5x + x^2)}{x}$ ، $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ ، $\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$

الحل

• لنحسب $\lim_{x\to0, x>0}(x - \ln x)$:

$$\lim_{x\to0, x>0}\ln x = -\infty \Rightarrow \lim_{x\to0, x>0}(x - \ln x) = +\infty$$

• لنحسب $\lim_{x\to0, x>0} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$:

$$\lim_{x\to0, x>0} x\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim_{x\to0, x>0}[x\ln x - x\ln(x+1)] = 0$$

• لنحسب $\lim_{x\to1, x<1}\ln(1 - x)$:

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to1, x<1}(1 - x) &= 0\\ 1 - x &> 0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to1, x<1}\ln(1 - x) = -\infty$$

• لنحسب $\lim_{x\to0, x>0}\frac{1 + \ln x}{2 - \ln x}$:

$$\lim_{x\to0, x>0}\frac{1 + \ln x}{2 - \ln x} = \lim_{x\to0, x>0}\frac{\ln x\left[\frac{1}{\ln x} + 1\right]}{\ln x\left[\frac{2}{\ln x} - 1\right]} = \lim_{x\to0, x>0}\frac{\frac{1}{\ln x} + 1}{\frac{2}{\ln x} - 1} = -1 \quad \left(\text{لأن } \lim_{x\to0, x>0}\frac{1}{\ln x} = 0\right)$$

• لنحسب $\lim_{x\to0, x>0}\frac{x + \ln x}{x - \ln x}$:

$$\lim_{x\to0, x>0}\frac{x + \ln x}{x - \ln x} = \lim_{x\to0, x>0}\frac{\ln x\left[\frac{x}{\ln x} + 1\right]}{\ln x\left[\frac{x}{\ln x} - 1\right]} = \lim_{x\to0, x>0}\frac{x\times\frac{1}{\ln x} + 1}{x\times\frac{1}{\ln x} - 1} = -1 \quad \left(\text{لأن } \lim_{x\to0, x>0} x\times\frac{1}{\ln x} = 0\right)$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{x^2+2}\right)$:

$$\left[\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x-1}{x^2+2}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{x}\right) = 0\right] \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x-1}{x^2+2}\right) = -\infty$$

• لنحسب $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + 2x)}{x}$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + 2x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + 2x)}{2x}\times 2 = 1 \times 2 = 2$$

• لنحسب $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 - 3x)}{x}$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 - 3x)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\ln[1 + (-3x)]}{(-3x)}\times(-3) = 1 \times (-3) = -3$$

• لنحسب $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + x)}{x^3}$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + x)}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + x)}{x}\times\frac{1}{x^2} = 1 \times (+\infty) = +\infty$$

• لنحسب $\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + 5x + x^2)}{x}$:

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1 + 5x + x^2)}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\ln[1 + (5x + x^2)]}{(5x + x^2)}\times\frac{5x + x^2}{x} = \lim_{x\to0}\frac{\ln[1 + (5x + x^2)]}{(5x + x^2)}\times(5 + x) = 1 \times 5 = 5$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to0, t>0}\frac{\ln(1 + t)}{t} = 1 \quad \left(\text{بوضع } t = \frac{1}{x}\right)$$

• لنحسب $\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{t\to0, t>0}\frac{\ln(1 + t)}{t}\times\frac{1}{t} = +\infty \quad \left(\text{بوضع } t = \frac{1}{x}\right)$$

التمرين 7

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{1}{x - 2} + \ln x$

1) أ - حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f.

ب - أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f.

2) أ - أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$.

ب - أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) أدرس الفرع اللانهائي لمنحنى الدالة f بجوار $(+\infty)$.

الحل

1) أ - $f(x) = \frac{1}{x - 2} + \ln x$

$$D_f = \{x \in IR / x > 0 \quad x - 2 \ne 0\} =]0;2[\, \cup\,]2,+\infty[$$

ب -

$$\left(\lim_{x\to0, x>0}\frac{1}{x - 2} = -\frac{1}{2} \quad \lim_{x\to0, x>0}\ln x = -\infty\right) \Rightarrow \lim_{x\to0, x>0} f(x) = -\infty$$
$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x - 2} = 0 \quad \lim_{x\to+\infty}\ln x = +\infty\right) \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$
$$\left(\lim_{x\to2, x>2}\frac{1}{x - 2} = +\infty \quad \lim_{x\to2, x>2}\ln x = \ln 2\right) \Rightarrow \lim_{x\to2, x>2} f(x) = +\infty$$
$$\left(\lim_{x\to2, x<2}\frac{1}{x - 2} = -\infty \quad \lim_{x\to2, x<2}\ln x = \ln 2\right) \Rightarrow \lim_{x\to0, x<0} f(x) = -\infty$$

2) أ -

$$\forall x \in D_f\ ; f'(x) = \frac{-1}{(x - 2)^2} + \frac{1}{x} = \frac{-x + (x - 2)^2}{x(x - 2)^2} = \frac{x^2 - 5x + 4}{x(x - 2)^2} = \frac{(x - 1)(x - 4)}{x(x - 2)^2}$$

ب - جدول تغيرات الدالة f.

x	0		1		2		4		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	‖	−	0	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	$\frac{1}{2} + 2\ln 2$	↗	$+\infty$

3) لنحسب $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{(x - 2)} + \frac{\ln x}{x} = 0$$

إذن محور الأفاصيل اتجاه مقارب لمنحنى الدالة f بجوار $+\infty$.

التمرين 8

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = \frac{2 + \ln x}{\sqrt{x}}$

وليكن (C) تمثيلها المبياني في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ - أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to0, x>0} f(x)$.

ب - أعط تأويلا هندسيا للنتيجتين المحصل عليهما.

2) أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f.

3) أ - بين أن : $f''(x) = \frac{3\ln x - 2}{4x^2\ \ x}$ $(\forall x \in]0, +\infty[)$

ب - استنتج أن المنحنى (C) يقبل نقطة انعطاف يجب تحديد إحداثيتيها.

4) أ - حدد إحداثيتي نقطة تقاطع المنحنى (C) مع محور الأفاصيل.

ب - أنشئ المنحنى (C) $\left(\text{نأخذ } e^{\frac{2}{3}} \approx 1,9 \text{ و } e^{\frac{1}{3}} \approx 1,9 \text{ و } e^{-2} \approx 0,1\right)$

5) نعتبر الدالة العددية F المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $F(x) = 2\ \ x\ln x$.

أ - بين أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0, +\infty[$.

ب - حدد الدالة الأصلية φ للدالة f التي تنعدم في 4.

الحل

$$f(x) = \frac{2 + \ln x}{x}$$

1) أ -

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2}{\sqrt{x}} + 2\frac{\ln\ \ x}{x}\right) = 0$$
$$\lim_{x\to0, x>0} f(x) = \lim_{x\to0, x>0}\frac{1}{x}(2 + \ln x) = -\infty$$

ب - • بما أن $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ فإن محور الأفاصيل مقارب أفقي للمنحنى (C).

• بما أن $\lim_{x\to0, x>0} f(x) = -\infty$ فإن محور الأراتيب مقارب عمودي للمنحنى (C).

2) حساب $f'(x)$:

$$\forall x \in]0, +\infty[\ f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\ \ x - \frac{1}{2\ \ x}(2 + \ln x)}{x} = \frac{-\ln x}{2x\ \ x}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

3) أ - لدينا $x\ \ x = x^{\frac{3}{2}}$ إذن $(x\ \ x)' = \frac{3}{2}\ \ x$ ومنه فإن :

$$\forall x \in]0, +\infty[\ f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}x\ \ x - \frac{3}{2}\ \ x\ln x}{2(x\ \ x)^2} = -\frac{\frac{x}{2}(2 - 3\ln x)}{2(x\ \ x)^2} = \frac{3\ln x - 2}{4x^2\ \ x}$$

ب - لدينا إشارة $f''(x)$ هي إشارة $3\ln x - 2$.

x	0		$e^{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f''(x)$	‖	−	0	+	

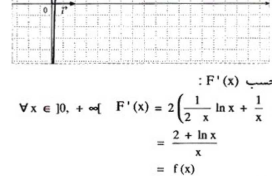
بما أن $f''(x)$ تنعدم في $e^{\frac{2}{3}}$ مع تغيير الإشارة فإن $A\left(e^{\frac{2}{3}}, \frac{8}{3e^{\frac{1}{3}}}\right)$ نقطة انعطاف المنحنى (C).

4) أ - لنحل المعادلة $f(x) = 0$:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + \ln x = 0$$
$$\Leftrightarrow x = e^{-2}$$

إذن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في النقطة $I(e^{-2}, 0)$.

ب -



5) أ - لنحسب $F'(x)$:

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad F'(x) = 2\left(\frac{1}{2\ \ x}\ln x + \frac{1}{x}\ \ x\right) = \frac{2 + \ln x}{x} = f(x)$$

إذن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0, +\infty[$.

ب - بما أن φ دالة أصلية للدالة f فإن $\varphi(x) = F(x) + c$.

لنحدد c حيث : $\varphi(4) = 0$

$$\varphi(4) = 0 \Leftrightarrow 4\ln 4 + c = 0$$
$$\Leftrightarrow c = -8\ln 2$$

إذن $\forall x \in]0, +\infty[\quad \varphi(x) = 2\ \ x\ln x - 8\ln 2$

Moutamadris.ma