تمارين: مبرهنة التزايدات المنتهية

الثانية سلك بكالوريا علوم رياضية

تمارين محلولة

التمرين1

نعتبر المتتالية (u_n) بحيث $u_0=\frac{1}{2}$; $u_{n+1}=g(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$

حيث $\forall x\in[0;+\infty[$ $g(x)=\arctan\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)$

1- بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

2- بين أن $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$

3- استنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

الحل

1- نبين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

نعتبر $h(x)=g(x)-x$ على $[0;1]$ لدينا h متصلة على $[0;1]$

لدينا $h'(x)=\dfrac{-1}{2(x^2+1)}-1$ ومنه h تناقصية قطعا على $[0;1]$

لدينا $h(0)\times h(1)=\frac{\pi}{4}\left(\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)-1\right)$

$0\prec\sqrt{2}-1\prec\tan\frac{\pi}{4}\prec\tan 1$ (لأن $\frac{\pi}{4}\prec 1$, $\sqrt{2}-1\prec 1$) ومنه $0\prec\arctan\left(\sqrt{2}-1\right)\prec 1$

إذن $h(0)\times h(1)\prec 0$

إذن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

أي أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $]0;1[$

2- نبين أن $\forall n\in\mathbb{N}$ $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$

لدينا $g(x)\in\,]0;1[$ $\forall x\in[0;+\infty[$

و حيث $u_0=\frac{1}{2}$; $u_{n+1}=g(u_n)$ $\forall n\in\mathbb{N}$ فان $0\prec u_n\prec 1$ $\forall n\in\mathbb{N}$ (نبين ذلك بالترجع)

الدالة g متصلة في مجال مغلق طرفاه α و u_n وقابلة للاشتقاق في مجال مفتوح طرفاه α و u_n

ومنه يوجد c محصور قطعا بين α و u_n حيث $g(u_n)-g(\alpha)=g'(c)(u_n-\alpha)$

أي أن $u_{n+1}-\alpha=\dfrac{-1}{2(1+c^2)}(u_n-\alpha)$ ومنه $|u_{n+1}-\alpha|=\dfrac{1}{2(1+c^2)}|(u_n-\alpha)|$

و حيث أن $0\prec c\prec 1$ فان $\frac{1}{4}\prec\dfrac{1}{2(1+c^2)}\prec\frac{1}{2}\prec\frac{4}{5}$ ومنه $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

3- نستنتج أن (u_n) متقاربة محددا نهايتها

لدينا $|u_{n+1}-\alpha|\prec\frac{4}{5}|u_n-\alpha|$ $\forall n\in\mathbb{N}$

$$|u_1-\alpha| \prec \frac{4}{5}|u_0-\alpha|$$

$$|u_2-\alpha| \prec \frac{4}{5}|u_1-\alpha|$$

. . .

. . .

. . .

$$|u_n-\alpha| \prec \frac{4}{5}|u_{n-1}-\alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على $|u_n-\alpha| \prec \left(\frac{4}{5}\right)^n |u_0-\alpha|$

وحيث $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n |u_0-\alpha| = 0$ فان (u_n) متقاربة و $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

التمرين2

لتكن f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x)=\frac{1}{4}\tan\frac{1}{x+1}$

1- بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $\forall x\in[0;1] \quad |f'(x)| \le \frac{1}{4\cos^2 1}$

2- بين أن $f([0;1]) \subset [0;1]$

3- أ- بين أنه : $\exists! \alpha \in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

ب- استنتج أن $\forall x\in]0;1[-\{\alpha\} \quad |f(x)-\alpha| \le \frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$

4- نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0 \in]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1} = \frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right) \end{cases}$

أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n |u_0-\alpha|$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

الحل

f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x)=\frac{1}{4}\tan\frac{1}{x+1}$

4- نبين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $\forall x\in[0;1] \quad |f'(x)| \le \frac{1}{4\cos^2 1}$

$x \to \frac{1}{x+1}$ قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و $/ k\in\mathbb{Z} \quad \frac{1}{x+1} \ne \frac{\pi}{2}+k\pi \quad \forall x\in[0;1]$

إذن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

و $\forall x\in[0;1] \quad f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[1+\tan^2\frac{1}{x+1}\right]=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$

$$\forall x\in[0;1] \quad |f'(x)|=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$$

الدالتان $x\to\cos x$ و $x\to\frac{1}{(x+1)^2}$ تناقصيتان على $[0;1]$ و $\forall x\in[0;1] \quad \frac{1}{2}\leq\frac{1}{x+1}\leq 1$

ومنه $1\leq\frac{1}{\cos^2\frac{1}{x+1}}\leq\frac{1}{\cos^2 1} \quad ; \quad \forall x\in[0;1] \quad \frac{1}{4}\leq\frac{1}{(x+1)^2}\leq 1$

إذن $\forall x\in[0;1] \quad |f'(x)|\leq\frac{1}{4\cos^2 1}$

5- نبين أن $f([0;1])\subset[0;1]$

$\forall x\in[0;1] \quad f'(x)=\frac{1}{4}\left(\frac{-1}{(x+1)^2}\right)\left[\frac{1}{\cos^2\left(\frac{1}{x+1}\right)}\right]$ و منه $\forall x\in[0;1] \quad f'(x)\leq 0$

إذن f تناقصية على $[0;1]$ ومنه $f([0;1])=\left[\frac{1}{4}\tan\frac{1}{2};\frac{1}{4}\tan 1\right]\subset[0;1]$

6- أ- نبين أنه : $\exists!\alpha\in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

نعتبر الدالة g المعرفة على $[0;1]$ بـ $g(x)=f(x)-x \quad \forall x\in[0;1]$

g متصلة على $[0;1]$

$g(0)=\frac{1}{4}\tan(1)\geq 0$ و $g(1)=-1+\frac{1}{4}\tan\frac{1}{2}\leq 0$

إذن $\exists!\alpha\in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

ب- نستنتج أن $\forall x\in]0;1[-\{\alpha\} \quad |f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$

ليكن $x\in]0;1[-\{\alpha\}$

لدينا f متصلة على مجال مغلق طرفاه α و x

f قابلة للاشتقاق على مجال I مفتوح طرفاه α و x

ومنه يوجد عدد c ينتمي إلى I حيث $f(x)-f(\alpha)=f'(c)(x-\alpha)$

و حيث أن $\forall x\in[0;1] \quad |f'(x)|\leq\frac{1}{4\cos^2 1}$ فان $\forall x\in]0;1[-\{\alpha\} \quad |f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$

-4
$$\begin{cases} u_0\in]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right)\end{cases}$$

أ- نبين أن $\left|u_0-\alpha\right| \left(\dfrac{1}{4\cos^2 1}\right)^n \leq \left|u_n-\alpha\right| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

لدينا $f\left(u_n\right) = \dfrac{1}{4}\tan\left(\dfrac{1}{u_n+1}\right) = u_{n+1} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

نبين بالترجع أن $]0;1[\in u_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$ ....

ومنه $\left|f\left(u_n\right)-\alpha\right| \leq \dfrac{1}{4\cos^2 1}\left|u_n-\alpha\right|$ و بالتالي $\left|u_{n+1}-\alpha\right| \leq \dfrac{1}{4\cos^2 1}\left|u_n-\alpha\right|$

من أجل $n=0$ لدينا $\left|u_1-\alpha\right| \leq \dfrac{1}{4\cos^2 1}\left|u_0-\alpha\right|$

من أجل $n=1$ لدينا $\left|u_2-\alpha\right| \leq \dfrac{1}{4\cos^2 1}\left|u_1-\alpha\right|$

....

....

....

$$\left|u_n-\alpha\right| \leq \dfrac{1}{4\cos^2 1}\left|u_{n-1}-\alpha\right|$$

بضرب أطراف المتفاوتات والاختزال نحصل على $\left|u_0-\alpha\right| \left(\dfrac{1}{4\cos^2 1}\right)^n \leq \left|u_n-\alpha\right| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ب- نستنتج أن $\left(u_n\right)$ متقاربة و حدد نهايتها.

لدينا $\left|u_0-\alpha\right| \left(\dfrac{1}{4\cos^2 1}\right)^n \leq \left|u_n-\alpha\right| \quad \forall n\in\mathbb{N}$

المتتالية $\left(\left[\dfrac{1}{4\cos 1}\right]^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\dfrac{1}{4\cos 1}\right]^n = 0$

ومنه $\left(u_n\right)$ متقاربة و $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

التمرين3

$\left(u_n\right)$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = g\left(u_n\right) \quad \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

حيث $g(x) = \arctan\sqrt{x+2} \qquad \forall x\in[0;2]$

-1 أ) بين أن $\arctan x \leq x \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

ب) بين أن $0 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n\in\mathbb{N}$

ج) بين أن $\left(u_n\right)$ متقاربة

-2 أ) بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α من $]0;2[$

ب) أثبت أن $g'(x) \leq \dfrac{1}{6\sqrt{2}} \quad \forall x\in\,]0;2[$

ج) بين أن $\left|u_{n+1}-\alpha\right| \leq \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\left|u_n-\alpha\right| \quad \forall n\in\mathbb{N}$ استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

الحل

-2 أ) نبين أن $\arctan x \leq x \quad \forall x\in\mathbb{R}^+$

لدينا $x \to x$ و $x \to \arctan x$ متصلتان على $\mathbb{R}^+$ و قابلتان للاشتقاق على $]0;+\infty[$

$$(x)' = x \qquad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2} \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$

لدينا $\frac{1}{1+x^2} \prec 1$ $\quad \forall x \in]0;+\infty[$ أي $(\arctan x)' \prec (x)'$ $\quad \forall x \in]0;+\infty[$

و $\arctan 0 = 0$

إذن $\arctan x \leq x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

ب) نبين أن $0 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

من أجل $n=0$ لدينا $0 \leq u_0 \leq 2$ لان $u_0 = 2$

نفترض أن $0 \leq u_n \leq 2$ ونبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq 2$

لدينا $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} \succ 0 \quad \forall x \in [0;2]$ ومنه g تزايدية على $[0;2]$

وحيث أن $0 \leq u_n \leq 2$ فان $g(0) \leq g(u_n) \leq g(2)$ أي $g(0) \leq u_{n+1} \leq g(2)$

لدينا $g(2) = \arctan 2 \leq 2 \quad ; \quad g(0) = \arctan\sqrt{2} \geq 0$

ومنه $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ إذن $0 \leq u_n \leq 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ج) نبين أن (u_n) متقاربة

لندرس رتابة (u_n)

لدينا $u_1 = g(u_0) = g(2) = \arctan 2$ ومنه $u_1 \leq u_0$

نفترض أن $u_{n+1} \leq u_n$ نبين أن $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

لينا $u_{n+1} \leq u_n$

و حيث أن g تزايدية على $[0;2]$ فان $g(u_{n+1}) \leq g(u_n)$ أي أن $u_{n+2} \leq u_{n+1}$

إذن $u_{n+1} \leq u_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه (u_n) تناقصية و بما أن (u_n) مصغورة بالعدد 0 فان (u_n) متقاربة

ج) أ) نبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α من $]0;2[$

نعتبر الدالة h حيث $h(x) = g(x) - x$

h متصلة على $[0;2]$ قابلة للاشتقاق على $]0;2[$

و $h(0) \times h(2) = \left(\arctan\sqrt{2}\right)(-2 + \arctan 2) \prec 0$

ومنه المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا في $]0;2[$

لدينا
$$h'(x) = g'(x) - 1 = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} - 1 = \frac{1 - 2\sqrt{x+1}(x+3)}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$$

وحيث $1 - 2\sqrt{x+1}(x+3) \prec 0 \quad \forall x \in]0;2[$ فان h تناقصية قطعا على $]0;2[$

إذن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في $]0;2[$

ب) نثبت أن $g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}} \quad \forall x \in]0;2[$

ليكن $x \in]0;2[$ لدينا $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)}$

بما أن $0 \prec x \prec 2$ فان $3 \prec x+3 \prec 5$ و $2\sqrt{2} \prec 2\sqrt{x+2} \prec 4$

و بالتالي $6\sqrt{2} \prec 2(x+3)\sqrt{x+2} \prec 20$ ومنه $\frac{1}{2\sqrt{x+2}(3+x)} \prec \frac{1}{6\sqrt{2}}$

إذن $\forall x \in]0;2[\quad g'(x) \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$

ج) نبين أن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$ و نستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

g متصلة على $[0;2]$ و قابلة للاشتقاق على $]0;2[$ و $\alpha \in]0;2[$ و $u_n \in [0;2] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ومنه يوجد c من $]0;2[$ حيث $g(u_n) - g(\alpha) = g'(c)(u_n - \alpha) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

و بالتالي $|g(u_n) - g(\alpha)| = |g'(c)||u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

و حيث $|g'(c)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}$ فان $|g(u_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

إذن $|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n - \alpha| \quad \forall n \in \mathbb{N}$

نستنتج $\lim_{n\to+\infty} u_n$

لدينا

$$|u_1 - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_0 - \alpha|$$

$$|u_2 - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_1 - \alpha|$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{6\sqrt{2}}|u_{n-1} - \alpha|$$

بضرب أطراف المتفاوتات و الاختزال نحصل على

$$|u_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)^n |u_0 - \alpha|$$

و حيث $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{6\sqrt{2}}\right)^n = 0$ فان $\lim_{n\to+\infty} u_n = \alpha$

تمارين

تمرين1

نعتبر أن الدالة العددية f متصلة على $[0;1]$ قابلة للاشتقاق على $]0;1[$ بحيث $f(1) = 1$ و $f(0) = 0$

بين أن $\exists c \in]0;1[\quad 2cf'(c) = \sqrt{c}$

تمرين2

لتكن f دالة عددية معرفة على $[0;1]$ بما يلي $f(x)=\frac{1}{4}\tan\frac{1}{x+1}$

7- بين أن f قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ و أن $\forall x\in[0;1] \quad |f'(x)|\leq\frac{1}{4\cos^2 1}$

8- بين أن $f([0;1])\subset[0;1]$

9- أ- بين أنه : $\exists!\alpha\in]0;1[\quad f(\alpha)=\alpha$

ب- استنتج أن $\forall x\in]0;1[-\{\alpha\} \quad |f(x)-\alpha|\leq\frac{1}{4\cos^2 1}|x-\alpha|$

4- نعتبر المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $\begin{cases} u_0\in]0;1[-\{\alpha\} \\ u_{n+1}=\frac{1}{4}\tan\left(\frac{1}{u_n+1}\right) \end{cases}$

أ- بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{4\cos^2 1}\right)^n|u_0-\alpha|$

ب- استنتج أن (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

تمرين3

I- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بـ $\begin{cases} f(x)=x+2-\sqrt{x^2+2x} & x\prec-2 \\ f(x)=\arctan\sqrt{x+2} & x\geq-2 \end{cases}$

1- أدرس اشتقاق f عند 2-

2- حدد الدالة المشتقة للدالة f

II- ليكن g قصور f على $[0;2]$ و (u_n) المتتالية العددية المعرفة بما يلي $\begin{cases} u_0=2 \\ u_{n+1}=g(u_n) & \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$

3- أ) بين أن $\forall x\in\mathbb{R}^+ \quad \arctan x\leq x$

ب) بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad 0\leq u_n\leq 2$

ج) بين أن (u_n) متقاربة

2- أ) بين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α من $]0;2[$

ب) أثبت أن $\forall x\in]0;2[\quad g'(x)\leq\frac{1}{6\sqrt{2}}$

ج) بين أن $\forall n\in\mathbb{N} \quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{6\sqrt{2}}|u_n-\alpha|$ استنتج $\lim_{n\to+\infty}u_n$

تمرين4

لتكن f متصلة على $[a;b]$ بحيث $f(a)=f(b)=0$ و $f'(a)=0$

بين أنه $\exists c\in\mathbb{N} \quad f'(c)=\frac{f(c)}{c-a}$

تمرين5 مبرهنة LAGRANGE)

لتكن f و g متصلتين على $[a;b]$ و قابلتين للاشتقاق على $]a;b[$ بحيث $\forall x\in]a;b[\quad g'(x)\neq 0$

1- بين أن $g(a)\neq g(b)$

2- نعتبر الدالة ψ المعرفة على $[a;b]$ بـ: $\psi(x)=f(x)-f(a)-k(g(x)-g(a))$

أ) حدد k لكي تكون $\psi(b)=0$

ب) استنتج أن $\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad \exists c\in]a;b[$

تمرين6

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على $[0;1]$ بحيث $f(0)=0$ و $f'(x)\neq 0 \quad \forall x\in[0;1]$

بين أن f لها إشارة ثابتة على $[0;1]$

تمرين7

لتكن f متصلة على $[a;b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a;b[$

ليكن $x_0\in]a;b[$ و $k\in\mathbb{R}_+^*$ بحيث $[x_0;x_0+h]\subset[a;b]$

1- بين أنه: $\exists\theta\in]0;1[\quad f(x_0+h)-f(x_0)=hf'(x_0+\theta h)$

2- تطبيق نعتبر $f(x)=\frac{1}{x+1}$

حدد θ بدلالة h ثم أحسب $\lim_{h\to 0}\theta$

مبرهنة التزايديات المنتهية

تمرين1

$f(x)=x^2-3x+5$

بين أن : $\exists c\in]1;2[\;/ f'(c)=0$

الحل

لدينا : f دالة عددية متصلة على $[1;2]$ قابلة للاشتقاق على $]1;2[$ و $f(1)=f(2)$

إذن حسب مبرهنة رول

$\exists c\in]1;2[\;/ f'(c)=0$

تمرين2

f و g دالتان عدديتان متصلتان على $[a;b]$ قابلتان للاشتقاق على $]a;b[$

بحيث : $\forall x\in]a;b[\;\; g'(x)\neq 0$

بين أن : $\exists c\in]a;b[\;/ \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

الحل

نطبق مبرهنة رول على :

$h(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g(x)$

تمرين3

f دالة عددية قابلة للاشتقاق على $[0;1]$

بحيث : $f(0)=0$ و $\forall x\in]0;1[\;\; f'(x)>0$

$(n;m)\in \mathbb{Q}_*^2$

بين أن : $\exists c\in]0;1[\;/ n\dfrac{f'(c)}{f(c)}=m\dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

الحل
نطبق مبرهنة رول على :
$$g(x)=f''(x)(f(1-x))'''$$

تمرين4
f دالة عددية متصلة على $[a;b]$ قابلة للاشتقاق على $]a;b[$
بحيث : $f(a)=f(b)$ و $f'(a)=0$
بين أن : $\exists c\in]a;b[\ / f'(c)=\dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$

الحل
نطبق مبرهنة رول على :
$$\begin{cases} g(x)=\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & x\in]a;b] \\ g(a)=f'(a) \end{cases}$$

تمرين5
$$f(x)=(e^x-1)(\ln x-1)(2x-6)(x+1)$$
بدون حساب $f'(x)$ بين أن المعادلة $f'(x)=0$ تقبل ثلاثة حلول مختلفة

الحل
حلول المعادلة $f(x)=0$ هي : $S=\{-1;0;e;3\}$
نطبق مبرهنة رول على : $f(x)$ في المجالات :
$$[-1;0]\ ;\ [0;e]\ ;\ [e;3]$$

تمرين6
a و b عددان من $\mathbb{R}^{+*}$ بحيث : $a<b$
بين أن : $\dfrac{b-a}{b}\le \ln(b)-\ln(a)\le \dfrac{b-a}{a}$

الحل
نطبق مبرهنة التزايديات المنتهية على :
$$\ln(x)\qquad x\in[a;b]$$
$$\exists c\in]a;b[\ / \ln(b)-\ln(a)=\frac{1}{c}(b-a)$$
لدينا : $a<c<b \Leftrightarrow \dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}<\dfrac{1}{a}$
و منه : $\dfrac{b-a}{b}\le \ln(b)-\ln(a)\le \dfrac{b-a}{a}$

تمرين7
باستعمال مبرهنة التزايديات المنتهية بين أن :
$$\forall x\in]0;+\infty[\quad \frac{x}{1+x^2}<\arctan(x)<x$$

الحل
نطبق مبرهنة التزايديات المنتهية على :
$$f(t)=\arctan(t)\quad t\in[0;x]$$
إذن : $\exists c\in]0;x[\ / \arctan(x)-\arctan(0)=\dfrac{1}{1+c^2}\times x$
و منه : $\exists c\in]0;x[\ / \arctan(x)=\dfrac{1}{1+c^2}\times x$
و لدينا : $0<c<x$ إذن : $\dfrac{1}{1+x^2}<\dfrac{1}{1+c^2}<1$
إذن : $\forall x\in]0;+\infty[\quad \dfrac{x}{1+x^2}<\arctan(x)<x$

تمرين8
$$f(x)=\ln(1+e^{-x})\quad x\in\mathbb{R}$$
نعتبر المتتالية (u_n) ، حدها الأول u_0 بحيث :
$$u_{n+1}=f(u_n)$$
1- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n>0$
2- بين أن : $\forall x>0\quad |f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$
3- بين أن : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad \left|u_{n+1}-\ln\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right|\le\dfrac{1}{2}\left|u_n-\ln\dfrac{1+\sqrt5}{2}\right|$
4- استنتج أن : (u_n) متقاربة ثم احسب : $\lim u_n$

الحل
1- $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n>0$ لأن : $\forall x\in\mathbb{R}\quad f(x)>0$
2- لدينا : $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}}{1+e^{-x}}=\dfrac{-1}{1+e^x}$
إذن : $|f'(x)|=\dfrac{1}{1+e^x}$
بما أن : $x>0$ فإن : $e^x>1$
ومنه : $\dfrac{1}{1+e^x}<\dfrac{1}{2}$
إذن : $\forall x>0\quad |f'(x)|\le\dfrac{1}{2}$
3- نعتبر : $\alpha=\ln\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ لدينا : $f(\alpha)=\alpha$
نطبق مبرهنة التزايديات المنتهية على : $f(x)$ في المجال المحصور بين : α و u_n
إذن : يوجد c تنتمي إلى المجال المفتوح المحصور بين : α و u_n بحيث : $f(u_n)-f(\alpha)=f'(c)(u_n-\alpha)$
و لدينا : $\alpha>0$ و $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad u_n>0$
إذن : $c>0$ و منه : $|f'(c)|\le\dfrac{1}{2}$
و منه : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad |u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{2}|u_n-\alpha|$

4- $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\leq\cdots\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n|u_1-\alpha|$

و منه : $\forall n\in\mathbb{N}^*\quad |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}|u_1-\alpha|$

إذن : $\lim u_n=\alpha$