

حساب الاحتمالات

السلسلة 1 (8 تمارين)

التمرين 1:

يحتوي كيس على ست كرات حمراء ، أربعة منها تحمل الرقم 1 و اثنتان تحملان الرقم 2 . وثمان كرات خضراء ،خمس منها تحمل الرقم 1 وثلاثة تحمل الرقم 2 . نسحب تائيا كرتين من الكيس .
نفترض أن جميع الكرات غير قابلة للتمييز بينها باللمس .
ليكن الحدثان : A " سحب كرتين من نفس اللون " و B " سحب كرتين تحملان نفس الرقم "

$$(1) \text{ بين أن } p(A) = \frac{43}{91}$$

$$(2) \text{ أحسب } p(B)$$

(3) علما أن الكرتين المسحوبتين من نفس اللون ، ما هو احتمال أن تحملان نفس الرقم

(4) هل الحدثان A و B مستقلان علل جوابك

(5) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة

أ. حدد قيم X

ب. حدد قانون احتمال X

ج. أحسب الأمل الرياضي و المغايرة و الانحراف الطرازي

التمرين 2:

نعتبر مجموعة من 10000 شخص نسبة الرجال فيها هي 60% . نعلم أن 20% من الرجال و 10% من النساء لهم دراية بالإعلاميات
نختار عشوائيا شخصا من هذه المجموعة .

(1) أحسب احتمال أن يكون هذا الشخص :

A_1 "رجلا له دراية بالإعلاميات "

A_2 " رجلا لا دراية له بالإعلاميات "

A_3 " امرأة لها دراية بالإعلاميات "

A_4 " امرأة لا دراية له بالإعلاميات "

(2) إذا افترضنا أن الشخص الذي تم اختياره له دراية بالإعلاميات . فما احتمال أن يكون من بين النساء.

التمرين 3:

ليكن X المتغير العشوائي المحدد بالجدول التالي :

X	-4	-3	1	3	4
$p(X = x)$	0,25	a	b	0,05	0,25

حدد a و b إذا علمت أن $E(X) = 0$

التمرين 4:

يجب تلميذ بشكل عشوائي على 10 أسئلة ، بحيث يختار جوابا واحدا لكل سؤال من بين أربعة أجوبة مقترحة ، منها جواب واحد فقط صحيح .

ليكن Y المتغير العشوائي الذي يربط كل إمكانية بعدد الأجوبة الصحيحة

- (1) أحسب احتمال كل من الحدثين
A " التلميذ حصل على ثلاثة أجوبة صحيحة "
B " التلميذ حصل على الأقل على جوابين صحيحين "
- (2) أحسب الأمل الرياضي و المغايرة و الإنحراف الطرازي

التمرين 5:

يحتوي صندوق U_1 على أربع كرات بيضاء وثلاث كرات سوداء و كرتين حمراوين . نسحب عشوائيا و تانيا ثلاث كرات من U_1 . لا يمكن التمييز بينها باللمس .

- (1) أحسب احتمالات الأحداث التالية :
A " سحب كرتين سوداوين وكرة حمراء "
B " سحب ثلاث كرات من نفس اللون "
C " سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل "
- (2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الألوان التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة
أحسب احتمال كل من الحدثين $(X = 3)$ و $(X = 2)$
- (3) نعتبر صندوقا آخر U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة سوداء

نضع الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 في الصندوق U_2 ثم نسحب عشوائيا و تانيا كرتين من U_2 .
ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان من U_2 بيضاوين علما أن الكرات الثلاث المسحوبة من U_1 لها نفس اللون .

التمرين 6:

يحتوي كيس على تسع بيدات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل الأعداد : 0 و 0 و 0 و 0 و 0 و 1 و 1 و 1 و 1

- (1) نسحب عشوائيا و في آن واحد بيدقتين من الكيس
ليكن A الحدث : " مجموع العددين اللذين تحملاهما البيدقتين المسحوبتين يساوي 1 "

$$p(A) = \frac{5}{9}$$

- (2) نعتبر اللعبة التالية : يسحب سعيد عشوائيا و في آن واحد بيدقتين من الكيس و يعتبر فائزا إذا سحب بيدقتين تحمل كل واحدة منها العدد 1

أ. بين أن احتمال فوز سعيد هو $\frac{1}{6}$

ب. لعب سعيد اللعبة السابقة ثلاث مرات (يعيد سعيد البيدقتين المسحوبتين إلى الكيس في كل مرة)
ما هو الإحتمال لكي يفوز سعيد مرتين بالضبط ؟

التمرين 7:

نسحب بالتتابع و بإحلال 3 كرات من كيس يحتوي على خمس كرات حمراء و ثلاث كرات بيضاء و كرتين سوداوين.
الحدث A : "الكرات الثلاث لها نفس اللون"
الحدث B : "كرة من كل لون"
الحدث C : "الحصول على الأقل على كرتين حمراوين"
أحسب احتمالات الأحداث A و B و C

التمرين 8:

يحتوي صندوق على ثلاث كرات بيضاء و كرتين حمراوين و كرة خضراء.
نسحب بالتتابع و بدون إحلال ثلاث كرات من الصندوق. ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق .
1. حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .
2. أحسب الأمل الرياضي $E(X)$.

تصحيح التمرين 1

التجربة " سحب كرتين في آن واحد من الكيس " ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{card } \Omega = C_{14}^2 = 91 \text{ لدينا}$$

(1) A " سحب كرتين من نفس اللون "



$$\text{card}A = C_6^2 + C_8^2 = 15 + 28 = 43 \text{ لدينا}$$

$$p(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card } \Omega} = \frac{43}{91} \text{ إذن}$$

(2) B " سحب كرتين تحملان نفس الرقم "



$$\text{card}B = C_9^2 + C_5^2 = 36 + 10 = 46 \text{ لدينا}$$

$$p(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card } \Omega} = \frac{46}{91} \text{ إذن}$$

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \text{ لدينا (3)}$$

نحسب $p(A \cap B)$:

لدينا $A \cap B$ " الحصول على كرتين تحملان نفس الرقم و نفس اللون "

$$\text{card}(A \cap B) = C_4^2 + C_5^2 + C_2^2 + C_3^2 = 6 + 10 + 1 + 3 = 20 \text{ لدينا}$$

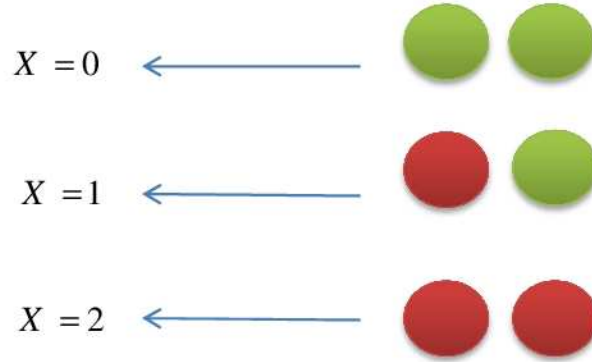
$$p(A \cap B) = \frac{20}{91} \text{ إذن}$$

$$p(A \cap B) = \frac{43}{91} \text{ و نعلم أن}$$

$$p_A(B) = \frac{\frac{20}{91}}{\frac{43}{91}} = \frac{20}{43} \text{ و منه}$$

(4) بما أن $p_A(B) \neq p(B)$ فإن A و B غير مستقلين .

(5) المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات الحمراء المسحوبة (أ)



$$p(X = 0) = \frac{C_8^2}{91} = \frac{28}{91} \quad (\text{ب})$$

$$p(X = 1) = \frac{C_8^1 \times C_6^1}{91} = \frac{8 \times 6}{91} = \frac{48}{91}$$

$$p(X = 2) = \frac{C_6^2}{91} = \frac{15}{91}$$

قانون احتمال X :

x_i	0	1	2
$p(X = x_i)$	$\frac{28}{91}$	$\frac{48}{91}$	$\frac{15}{91}$

(ج) الأمل الرياضي :

$$E(X) = \left(0 \times \frac{28}{91}\right) + \left(1 \times \frac{48}{91}\right) + \left(2 \times \frac{15}{91}\right) = \frac{78}{91}$$

المغايرة :

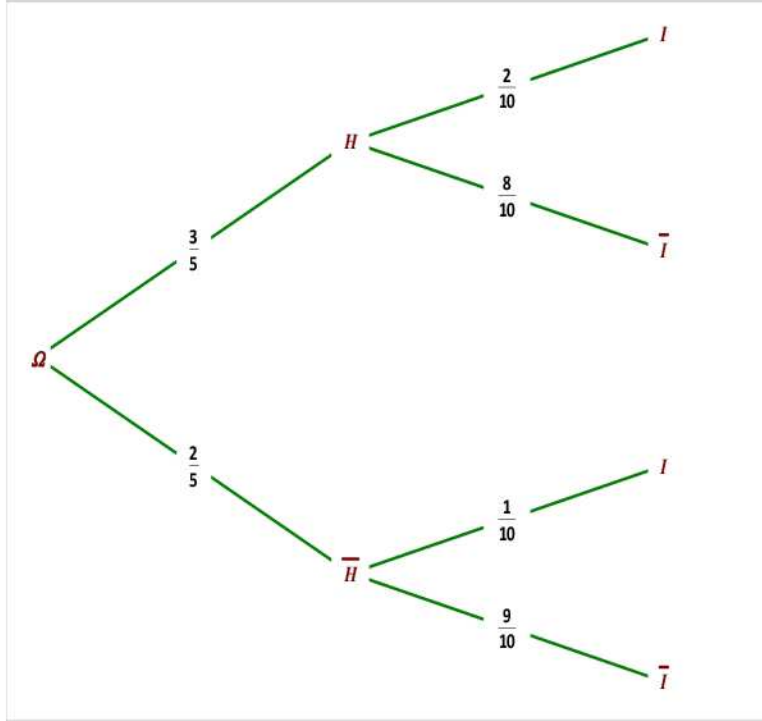
$$V(X) = \left(0^2 \times \frac{28}{91}\right) + \left(1^2 \times \frac{48}{91}\right) + \left(2^2 \times \frac{15}{91}\right) - \left(\frac{78}{91}\right)^2 = \frac{3780}{8281}$$

الانحراف الطرازي :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{3780}{8281}} \approx 0,67$$

تصحيح التمرين 2

" H " الشخص المختار رجل "
" I " الشخص المختار له دراية بالإعلاميات "



$$p(A_1) = p(H \cap I) = \frac{3}{5} \times \frac{2}{10} = \frac{3}{25} \quad (1)$$

$$p(A_2) = p(H \cap \bar{I}) = \frac{3}{5} \times \frac{8}{10} = \frac{12}{25}$$

$$p(A_3) = p(\bar{H} \cap I) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{1}{25}$$

$$p(A_4) = p(\bar{H} \cap \bar{I}) = \frac{2}{5} \times \frac{9}{10} = \frac{9}{25}$$

$$p_I(\bar{H}) = \frac{p(\bar{H} \cap I)}{p(I)} = \frac{p(A_3)}{p(A_1) + p(A_3)} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{3}{25} + \frac{1}{25}} = \frac{\frac{1}{25}}{\frac{4}{25}} = \frac{1}{4} \quad (2)$$

تصحيح التمرين 3

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sum_i p_i = 1 \\ E(X) = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \sum_i p_i = 1 \\ \sum_i p_i x_i = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 0,25 + a + b + 0,05 + 0,25 = 1 \\ (-4 \times 0,25) + (-3 \times a) + (1 \times b) + (3 \times 0,05) + (4 \times 0,25) = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 0,45 \\ -3a + b = -0,15 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = 0,15 \\ b = 0,30 \end{cases} \end{aligned}$$

تصحيح التمرين 4

(1) "اختبار جواب صحيح" V

$$p(V) = \frac{1}{4} \text{ لدينا}$$

Y متغير عشوائي حداني و سيطاه $n = 10$ و $p = p(V) = \frac{1}{4}$

A " التلميذ حصل على ثلاثة أجوبة صحيحة "

$$p(A) = p(Y = 3) = C_{10}^3 p^3 (1-p)^{10-3} = 120 \times \frac{1}{64} \times \frac{2187}{16384} = \frac{32805}{131072}$$

B " التلميذ حصل على الأقل على جوابين صحيحين "

$$p(B) = p(Y \geq 2)$$

$$p(B) = 1 - p(Y < 2)$$

$$p(B) = 1 - (p(Y = 0) + p(Y = 1))$$

$$\begin{aligned} p(B) &= 1 - (C_{10}^0 p^0 (1-p)^{10-0} + C_{10}^1 p^1 (1-p)^{10-1}) \\ &= \frac{792697}{1048576} \end{aligned}$$

$$E(Y) = n \times p = 10 \times \frac{1}{4} = 2,5 \quad (2)$$

$$V(Y) = n \times p \times (1-p) = 10 \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = 1,875$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} \approx 1,37$$

تصحيح التمرين 5

التجربة " سحب في آن واحد ثلاث كرات من U_1 "

ليكن Ω_1 كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{card } \Omega_1 = C_9^3 = 84 \text{ لدينا :}$$

(1) " سحب كرتين سوداوين و كرة حمراء "

$$\text{card}A = C_3^2 \times C_2^1 = 3 \times 2 = 6$$

$$p(A) = \frac{6}{84} = \frac{1}{14}$$

" سحب ثلاث كرات من نفس اللون "

$$\text{card}B = C_4^3 + C_3^3 = 4 + 1 = 5$$

$$p(B) = \frac{5}{84}$$

" سحب كرة بيضاء واحدة على الأقل "

" \bar{C} " عدم سحب أية كرة بيضاء "

$$p(\bar{C}) = \frac{C_5^3}{84} = \frac{10}{84} = \frac{5}{42}$$

لدينا :

$$p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{5}{42} = \frac{37}{42} \text{ إذن :}$$

(2) المتغير العشوائي الذي يربط كل سحبة بعدد الألوان التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة

$$B, N, R \quad \leftarrow (X = 3)$$

$$p(X = 3) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{84} = \frac{2}{7}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B, B, \bar{B} \\ R, R, \bar{R} \\ N, N, \bar{N} \end{array} \right. \quad \leftarrow (X = 2)$$

$$p(X = 2) = \frac{C_4^2 \times C_5^1 + C_3^2 \times C_6^1 + C_2^2 \times C_7^1}{84} = \frac{55}{84}$$

(3) " سحب كرتين بيضاوين من U_2 "

$$p_B(F) = \frac{p(F \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{C_4^3 \times C_5^2}{84} + \frac{C_3^3 \times C_2^2}{84}}{\frac{5}{84}} = \frac{41}{75}$$

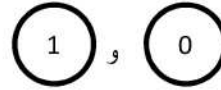
تصحیح التمرین 6

(1) التجربة " سحب في آن واحد بيدقتين من الكيس "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{card } \Omega = C_9^2 = 36$$

" A مجموع العددين اللذين تحملاهما البيدقتين المسحوبتين يساوي 1 "



$$\text{card}A = C_5^1 \times C_4^1 = 20$$

$$p(A) = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$

(2) (أ) B " فوز سعيد " ← (ب)

$$p(B) = \frac{C_4^2}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

(ب) لدينا تكرار لاختبار:

$n = 3$: عدد المرات التي لعب فيها سعيد اللعبة السابقة

$k = 2$: فوز سعيد باللعبة مرتين بالضبط

$$p = p(B) = \frac{1}{6}$$

إذن : احتمال فوز سعيد مرتين بالضبط هو :

$$C_3^2 \times p^2 \times (1-p)^{3-2} = 3 \times \left(\frac{1}{6}\right)^2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5}{72}$$

تصحيح التمرين 7

التجربة " سحب 3 كرات بالتتابع و بإحلال من الكيس "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{card } \Omega = 10^3 = 1000 \text{ لدينا}$$

" A الكرات الثلاث لها نفس اللون "

$$\text{card}A = 5^3 + 3^3 + 2^3 = 160$$

$$p(A) = \frac{160}{1000} = \frac{4}{25}$$

" B الحصول على كرة من كل لون "

$$p(B) = \frac{6 \times (5^1 \times 3^1 \times 2^1)}{1000} = \frac{9}{50}$$

" C الحصول على الأقل على كرتين حمراوين "

$$p(C) = \frac{3 \times (5^2 \times 5^1)}{1000} = \frac{15}{40}$$

تصحيح التمرين 8

التجربة " سحب بالتتابع و بدون إحلال 3 كرات من الصندوق "

ليكن Ω كون إمكانيات هذه التجربة

$$\text{card } \Omega = A_6^3 = 120 \text{ لدينا}$$

X المتغير العشوائي الذي يساوي عدد الكرات البيضاء المتبقية في الصندوق (1)

$$B, B, B \quad \leftarrow \quad (X = 0)$$

$$p(X = 0) = \frac{A_3^3}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B, B, \bar{B} \\ B, \bar{B}, B \\ \bar{B}, B, B \end{array} \right. \quad \leftarrow \quad (X = 1)$$

$$p(X = 1) = \frac{3 \times A_3^2 \times A_3^1}{120} = \frac{54}{120} = \frac{9}{20}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{B}, \overline{B}, B \\ \overline{B}, B, \overline{B} \\ B, \overline{B}, \overline{B} \end{array} \right. \longleftarrow (X = 2)$$

$$p(X = 1) = \frac{3 \times A_3^1 \times A_3^2}{120} = \frac{54}{120} = \frac{9}{20}$$

$$\overline{B}, \overline{B}, \overline{B} \longleftarrow (X = 3)$$

$$p(X = 3) = \frac{A_3^3}{120} = \frac{6}{120} = \frac{1}{20}$$

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{9}{20}$	$\frac{1}{20}$

$$E(X) = \left(0 \times \frac{1}{20}\right) + \left(1 \times \frac{9}{20}\right) + \left(2 \times \frac{9}{20}\right) + \left(3 \times \frac{1}{20}\right) = \frac{30}{20} = 1,5 \text{ : الأمل الرياضي}$$

つづく