

الفضاءات المتجهية الحقيقية

تمرين 1

I مجموعة الدوال العددية الفردية المعرفة على $\mathbb{R}$
 P مجموعة الدوال العددية الزوجية المعرفة على $\mathbb{R}$

1- بين أن : $(I; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2- بين أن : $(P; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

الحل

1- لنبين أن : $(I; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

الطريقة 1 (تعريف فضاء متجهي حقيقي)

أ- نبين أن : $(I; +)$ زمرة تبادلية

لنبين أن : $(I; +)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +)$

نعتبر $(u; v) \in I^2$ و نبين أن $u - v \in I$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$(u - v)(-x) = u(-x) - v(-x)$$

$$= -u(x) + v(x)$$

$$= -(u(x) - v(x))$$

$$\boxed{(u - v)(-x) = -(u - v)(x)}$$

إذن : $\forall (u; v) \in I^2 \quad u - v \in I$

إذن : $(I; +)$ زمرة جزئية من $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +)$

و بم أن : $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +)$ زمرة تبادلية

فإن : $(I; +)$ زمرة تبادلية

ب- نعتبر : $(u; v) \in I^2$ و $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

1- نبين أن : $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

$$(\alpha + \beta)u(x) = \alpha u(x) + \beta u(x)$$

$$(\alpha + \beta)u(x) = (\alpha u + \beta u)(x)$$

إذن : $(\alpha + \beta)u = \alpha u + \beta u$

2- نبين أن : $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

$$(\alpha\beta)u(x) = \alpha(\beta u(x))$$

$$(\alpha\beta)u(x) = \alpha(\beta u)(x)$$

إذن : $(\alpha\beta)u = \alpha(\beta u)$

3- نبين أن : $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$

4- نبين أن : $lu = u$

استنتاج

من- أ - و- ب - : $(I; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

الطريقة 2 (الفضاء المتجهي الجزئي)

نبين أن : $(I; +; \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي

$$(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \cdot)$$

(1) $I \neq \emptyset$ لأن : $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in I$

نعتبر : $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ و $(u; v) \in I^2$

و نبين أن : $(\alpha u + \beta v) \in I$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$(\alpha u + \beta v)(-x) = \alpha u(-x) + \beta v(-x)$$

$$= -\alpha u(x) - \beta v(x)$$

$$(\alpha u + \beta v)(-x) = -(\alpha u + \beta v)(x)$$

إذن :

$$(2) (\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) (\forall (u; v) \in I^2) : (\alpha u + \beta v) \in I$$

و من (1) و (2) : $(I; +; \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء

المتجهي

$$(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \cdot)$$

و بالتالي : $(I; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2- نبين أن : $(P; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : $(P; +; \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء المتجهي

$$(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \cdot)$$

(1) $P \neq \emptyset$ لأن : $0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in P$

نعتبر : $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ و $(u; v) \in P^2$

و نبين أن : $(\alpha u + \beta v) \in P$

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$(\alpha u + \beta v)(-x) = \alpha u(-x) + \beta v(-x)$$

$$= \alpha u(x) + \beta v(x)$$

$$(\alpha u + \beta v)(-x) = (\alpha u + \beta v)(x)$$

إذن :

$$(2) (\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) (\forall (u; v) \in P^2) : (\alpha u + \beta v) \in P$$

و من (1) و (2) : $(P; +; \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء

المتجهي

$$(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \cdot)$$

و بالتالي : $(P; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

تمرين 2

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$

اكتب : $M = \begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 10 & 5 \end{pmatrix}$ كتأليفة خطية ل

$$M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

الحل

بين أن : $B = (1; \cos^2 x; \cos 2x)$ أسرة مقيدة

الحل

لدينا : $\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1$
إذن : B أسرة مقيدة

تمرين 6

1- في الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$

بين أن : $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$

أساس في $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$ ثم استنتج بُعْد $M_2(\mathbb{R})$

2- في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

بين أن : $B = ((1;0);(0;1))$ أساس في $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

ثم استنتج بُعْد $\mathbb{R}^2$

3- في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{S}_2; +; \cdot)$

بين أن : $B = (1; x; x^2)$ أساس في $(\mathcal{S}_2; +; \cdot)$

ثم استنتج بُعْد $\mathcal{S}_2$

الحل

1- أ - نبين أن : B أسرة مولدة لـ $M_2(\mathbb{R})$

نعتبر : $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن : B أسرة مولدة لـ $M_2(\mathbb{R})$

ب - نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a; b; c; d) \in \mathbb{R}^4$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ثم نبين أن : $a = b = c = d = 0$

$$a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و منه : $a = b = c = d = 0$

إذن : B أسرة حرة

ومن أ- ب : B أساس للفضاء المتجهي $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$

إذن : $\dim M_2(\mathbb{R}) = \text{card} B$

$$\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$$

2- أ - نبين أن : B أسرة مولدة لـ $\mathbb{R}^2$

نعتبر : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -7 \\ 10 & 5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} - 5 \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن : $M = 2M_1 - 5M_2$

تمرين 3

بين أن : $((2;3);(-1;5))$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي

$(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

الحل

لنبين أن : $((2;3);(-1;5))$ تولد الفضاء المتجهي الحقيقي

$(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

نعتبر : $(x; y) \in \mathbb{R}^2$

$$(x; y) = \alpha(2;3) + \beta(-1;5) \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha + 3\beta = x \\ -1\alpha + 5\beta = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{5x - 3y}{13} \\ \beta = \frac{x + 2y}{13} \end{cases}$$

إذن :

$$\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \exists (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 : (x; y) = \alpha(2;3) + \beta(-1;5)$$

$$\alpha = \frac{5x - 3y}{13}; \beta = \frac{x + 2y}{13} \quad \text{بحيث :}$$

و منه : $((2;3);(-1;5))$ أسرة مولدة لـ $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

تمرين 4

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(M_2(\mathbb{R}); +; \cdot)$

بين أن : $B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ أسرة حرة

الحل

نعتبر : $(\alpha; \beta; \gamma) \in \mathbb{R}^3$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ثم نبين أن : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \alpha + \beta & \alpha + \gamma \\ \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

و منه : $\alpha = \beta = \gamma = 0$

B أسرة حرة

تمرين 5

في الفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{S}(\mathbb{R}; \mathbb{R}); +; \cdot)$

$$(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') = \alpha(x + y) + \beta(x' + y')$$

$$(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') = 0$$

إذن :

$$(2) \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall (x, y); (x', y') \in F^2 : \alpha(x, y) + \beta(x', y') \in F$$

ومنه (1) و (2) :

F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$
ومنه : F فضاء متجهي حقيقي

2- حدد أساسا ل F ثم استنتج بُعْده

نعتبر : $(x, y) \in F$ إذن : $y = -x$

ومنه : $(x, y) = (x, -x)$

$$(x, y) = x(1, -1)$$

إذن : $B = ((1, -1))$ أسرة مولدة ل F

لنبين أن B أسرة حرة

نعتبر : $a \in \mathbb{R}$ بحيث : $a(1, -1) = (0, 0)$

ثم نبين أن : $a = 0$

لدينا : $a(1, -1) = (0, 0)$ إذن : $a(1, -1) = (0, 0)$

ومنه : $a = 0$

إذن : B أسرة حرة

بما أن : $B = ((1, -1))$ أسرة مولدة ل F و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي F

إذن : $\dim F = \text{card} B$

$$\dim F = 2$$

تمرين 8

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -3x + y - 2z = 0\}$$

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / -x + y + z = 0\}$$

1- أ - بين أن : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب - حدد أساسا ل E ثم استنتج بُعْده

2- أ - بين أن : $(F; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب - حدد أساسا ل F ثم استنتج بُعْده

3- أ - بين أن : $(E \cap F; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب - حدد أساسا ل $E \cap F$ ثم استنتج بُعْده

الحل

1- أ - لنبين أن : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3; +; \cdot)$

$$(1) \quad (0, 0, 0) \in E \quad \text{لأن : } E \neq \emptyset$$

نعتبر : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ و $((x, y, z); (x', y', z')) \in E^2$

نبين : $\alpha(x, y, z) + \beta(x', y', z') \in E$

$$(a; b) = a(1; 0) + b(0; 1)$$

إذن : B أسرة مولدة ل $\mathbb{R}^2$

ب - نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$

$$a(1; 0) + b(0; 1) = (0; 0)$$

ثم نبين أن : $a = b = 0$

$$a(1; 0) + b(0; 1) = (0; 0)$$

إذن : $(a; b) = (0; 0)$

ومنه : $a = b = 0$

إذن : B أسرة حرة

ومن أ - ب : B أساس للفضاء المتجهي $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

إذن : $\dim \mathbb{R}^2 = \text{card} B$

$$\dim \mathbb{R}^2 = 2$$

2- أ - نبين أن : B أسرة مولدة ل $\mathcal{S}_2$

نعتبر : $(ax^2 + bx + c) \in \mathcal{S}_2$

$$ax^2 + bx + c = a(x^2) + b(x) + c(1)$$

إذن : B أسرة مولدة ل $\mathcal{S}_2$

ب - نبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$

بحيث : $ax^2 + bx + c = 0$

ثم نبين أن : $a = b = c = 0$

لدينا : $ax^2 + bx + c = 0$

إذن : $a = b = c = 0$

ومنه : B أسرة حرة

ومن أ - ب : B أساس للفضاء المتجهي $(\mathcal{S}_2; +; \cdot)$

إذن : $\dim \mathcal{S}_2 = \text{card} B$

$$\dim \mathcal{S}_2 = 3$$

تمرين 7

$$F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x + y = 0\}$$

1- بين أن : $(F; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

2- حدد أساسا ل F ثم استنتج بُعْده

الحل

1- لنبين أن : F فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^2; +; \cdot)$

$$(1) \quad (0, 0) \in F \quad \text{لأن : } F \neq \emptyset$$

نعتبر : $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ و $((x, y); (x', y')) \in F^2$

نبين : $\alpha(x, y) + \beta(x', y') \in F$

$$\alpha(x, y) + \beta(x', y') = (\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y')$$

$$E \cap F = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} -3x + y - 2z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \right\}$$

$$E \cap F = \left\{ (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / \begin{cases} x = -\frac{3}{2}z \\ y = -\frac{5}{2}z \end{cases} \right\}$$

$$E \cap F = \left\{ \left(-\frac{3}{2}z; -\frac{5}{2}z; z \right) / z \in \mathbb{R} \right\}$$

- لنبين أن : $(E \cap F; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي بنفس طريقة 1- أ نجد :

$E \cap F$ فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3; +; \cdot)$ و منه : $(E \cap F; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعده

$$\left(-\frac{3}{2}z; -\frac{5}{2}z; z \right) = z \left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}; 1 \right)$$

بنفس طريقة 1 ب نبين أن :

$$E \cap F \text{ أساس للفضاء المتجهي } B = \left\{ \left(-\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}; 1 \right) \right\}$$

إذن : $\dim E \cap F = \text{card} B$

$$\boxed{\dim E \cap F = 1}$$

تمرين 9

لكل : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ و $x \in \mathbb{R}^{**}$

نعتبر الدالة العددية : $\varphi_{(a;b)}(x) = \ln(x^a e^{bx})$

$$E = \{ \varphi_{(a;b)} / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

أ- بين أن : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساس ل E ثم استنتج بُعده

الحل

$$\begin{aligned} \varphi_{(a;b)}(x) &= \ln(x^a e^{bx}) \\ &= \ln(x^a) + \ln(e^{bx}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\varphi_{(a;b)}(x) = a \ln(x) + bx}$$

أ- لبين أن : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \cdot)$

$$E \neq \emptyset \text{ لأن : } \varphi_{(0;0)} = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})} \in E \quad (1)$$

نعتبر : $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ و $(\varphi_{(a;b)}; \varphi_{(c;d)}) \in E^2$

و نبين أن : $(\alpha \varphi_{(a;b)} + \beta \varphi_{(c;d)}) \in E$

ليكن $x \in \mathbb{R}^{**}$

$$\begin{aligned} \alpha(x; y; z) + \beta(x'; y'; z') &= (\alpha x + \beta x'; \alpha y + \beta y'; \alpha z + \beta z') \\ -3(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') + 2(\alpha z + \beta z') &= \alpha(-3x + y + 2z) + \beta(-3x' + y' + 2z') \\ -3(\alpha x + \beta x') + (\alpha y + \beta y') + 2(\alpha z + \beta z') &= 0 \end{aligned}$$

إذن :
ومنه : (2)

$$\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall ((x; y; z); (x'; y'; z')) \in E^2 : \alpha(x; y; z) + \beta(x'; y'; z') \in E$$

و من (1) و (2) :

E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3; +; \cdot)$ و منه : E فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعده

نعتبر : $(x; y; z) \in E$: إذن : $y = 3x - 2z$

$$(x; y; z) = (x; 3x - 2z; z)$$

$$\boxed{(x; y; z) = x(1; 3; 0) + z(0; -2; 1)}$$

إذن : $B = ((1; 3; 0), (0; -2; 1))$ أسرة مولدة ل E

لنبين أن : B أسرة حرة

نعتبر : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ بحيث : $a(1; 3; 0) + b(0; -2; 1) = (0; 0; 0)$

ثم نبين أن : $a = b = 0$

$$\text{لدينا : } a(1; 3; 0) + b(0; -2; 1) = (0; 0; 0)$$

$$\text{إذن : } (a; 3a - 2b; b) = (0; 0; 0)$$

و منه : $a = b = 0$

إذن : B أسرة حرة

بما أن : B أسرة مولدة ل E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

إذن : $\dim E = \text{card} B$

$$\boxed{\dim E = 2}$$

2- أ- بين أن : $(F; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

بنفس طريقة 1- أ نجد :

F فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathbb{R}^3; +; \cdot)$

و منه : $(F; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل F ثم استنتاج بُعده

نعتبر : $(x; y; z) \in F$: إذن : $x = y + z$

$$(x; y; z) = (y + z; y; z)$$

$$\boxed{(x; y; z) = y(1; 1; 0) + z(1; 0; 1)}$$

بنفس طريقة 1 ب نبين أن :

$B = ((1; 1; 0), (1; 0; 1))$ أساس للفضاء المتجهي F

إذن : $\dim F = \text{card} B$

$$\boxed{\dim F = 2}$$

3- أ- تحديد $E \cap F$

$$\varphi_{(a;b)}(x) = \frac{(a+b)x + a - b}{x^2 - 1}$$

$$= \frac{a(x+1) + b(x-1)}{(x-1)(x+1)}$$

$$\boxed{\varphi_{(a;b)}(x) = a \frac{1}{(x-1)} + b \frac{1}{(x+1)}}$$

أ - لبيّن أن : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

نبين أن : E فضاء متجهي حقيقي جزئي من $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}); +; \cdot)$

$E \neq \emptyset$ لأن : $\varphi_{(0;0)} = 0_{\mathcal{F}(I, \mathbb{R})} \in E$ (1)

نعتبر : $(\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2$ و $(\varphi_{(a;b)}; \varphi_{(c;d)}) \in E^2$

و نبين أن : $(\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)}) \in E$

ليكن $x \in]-1; 1[$

$$\begin{aligned} (\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)})(x) &= \alpha\varphi_{(a;b)}(x) + \beta\varphi_{(c;d)}(x) \\ &= \alpha \left(a \frac{1}{(x-1)} + b \frac{1}{(x+1)} \right) + \beta \left(c \frac{1}{(x-1)} + d \frac{1}{(x+1)} \right) \\ &= (\alpha a + \beta c) \frac{1}{(x-1)} + (\alpha b + \beta d) \frac{1}{(x+1)} \\ &= \varphi_{(\alpha a + \beta c; \alpha b + \beta d)}(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)} = \varphi_{(\alpha a + \beta c; \alpha b + \beta d)}}$$

إذن : (2)

$$(\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) ((\varphi_{(a;b)}; \varphi_{(c;d)}) \in E^2) : (\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)}) \in E$$

و من (1) و (2) : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء

المتجهي $(\mathcal{F}(I, \mathbb{R}); +; \cdot)$

و بالتالي : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعْده

نعتبر : $\varphi_{(a;b)} \in E$ و $x \in]-1; 1[$

$$\varphi_{(a;b)}(x) = a \frac{1}{(x-1)} + b \frac{1}{(x+1)} \quad \text{إذن :}$$

و منه : $B = (\varphi_{(1;0)}, \varphi_{(0;1)})$ أسرة مولدة ل E

$$\text{بحيث : } \varphi_{(0;1)}(x) = \frac{1}{(x+1)} \text{ و } \varphi_{(1;0)}(x) = \frac{1}{(x-1)}$$

لنبين أن : B أسرة حرة

$$\text{نعتبر : } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ بحيث : } a\varphi_{(1;0)}(x) + b\varphi_{(0;1)}(x) = 0$$

ثم نبين أن : $a = b = 0$

$$\text{لدينا : } a\varphi_{(1;0)}(x) + b\varphi_{(0;1)}(x) = 0$$

$$\forall x \in]-1; 1[\quad a \frac{1}{(x-1)} + b \frac{1}{(x+1)} = 0 \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} (\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)})(x) &= \alpha\varphi_{(a;b)}(x) + \beta\varphi_{(c;d)}(x) \\ &= \alpha(a \ln(x) + bx) + \beta(c \ln(x) + dx) \\ &= (\alpha a + \beta c) \ln(x) + (\alpha b + \beta d)x \\ &= \varphi_{(\alpha a + \beta c; \alpha b + \beta d)}(x) \end{aligned}$$

$$\boxed{\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)} = \varphi_{(\alpha a + \beta c; \alpha b + \beta d)}}$$

إذن : (2)

$$(\forall (\alpha; \beta) \in \mathbb{R}^2) ((\varphi_{(a;b)}; \varphi_{(c;d)}) \in E^2) : (\alpha\varphi_{(a;b)} + \beta\varphi_{(c;d)}) \in E$$

و من (1) و (2) : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي جزئي من الفضاء

المتجهي $(\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); +; \cdot)$

و بالتالي : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- تحديد أساس ل E ثم استنتاج بُعْده

نعتبر : $\varphi_{(a;b)} \in E$ و $x \in \mathbb{R}^{**}$

$$\varphi_{(a;b)}(x) = a \ln(x) + bx \quad \text{إذن :}$$

و منه : $B = (\varphi_{(1;0)}, \varphi_{(0;1)})$ أسرة مولدة ل E

$$\text{بحيث : } \varphi_{(0;1)}(x) = x \text{ و } \varphi_{(1;0)}(x) = \ln(x)$$

لنبين أن : B أسرة حرة

$$\text{نعتبر : } (a; b) \in \mathbb{R}^2 \text{ بحيث : } a\varphi_{(1;0)}(x) + b\varphi_{(0;1)}(x) = 0$$

ثم نبين أن : $a = b = 0$

$$\text{لدينا : } a\varphi_{(1;0)}(x) + b\varphi_{(0;1)}(x) = 0$$

$$\text{إذن : } \forall x \in \mathbb{R}^{**} \quad a \ln(x) + bx = 0$$

نعتبر : $x = 1$ نجد : $b = 0$

نعتبر : $x = e$ نجد : $a = 0$

و منه : $a = b = 0$

إذن : B أسرة حرة

بما أن : B أسرة مولدة ل E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

إذن : $\dim E = \text{card} B$

$$\boxed{\dim E = 2}$$

تمرين 10

لكل : $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ و $x \in]-1; 1[$ ؛ $I =]-1; 1[$

$$\varphi_{(a;b)}(x) = \frac{(a+b)x + a - b}{x^2 - 1}$$

$$E = \{ \varphi_{(a;b)} / (a; b) \in \mathbb{R}^2 \}$$

أ - بين أن : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

ب- حدد أساس ل E ثم استنتاج بُعْده

الحل

ولدينا : $\vec{u} = \vec{u}_1 + 2\vec{u}_2 + 3\vec{u}_3$

إذن : $\begin{cases} a+b+c=1 \\ a-2b-c=2 \\ a-b+c=3 \end{cases}$ ومنه : $a=0; b=-\frac{5}{3}; c=\frac{4}{3}$

إذن : $\vec{u} \left(0; -\frac{5}{3}; \frac{4}{3} \right)$ في الأساس B_2

تمرين 12

$$E = \left\{ M = \begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} / (a; b; c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$$

نضع : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; K = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

1- تحقق أن : $IK = KJ = I + J; k^2 = J + K; j^2 = K$

2- بين أن : $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و حدد أساسا له

3- بين أن : $(E; +; \times)$ حلقة واحدة

4- تحقق أن : $J^3 = I + J$ ثم حدد J^{-1}

الحل

1- نتحقق أن : $IK = KJ = I + J; k^2 = J + K; j^2 = K$

الحساب

2- $(E; +; \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي

يكفي أن نبين أن : E فضاء متجهي جزئي من $(M_3(\mathbb{R}); +; \cdot)$ تحديد أساس ل E

$$\begin{pmatrix} a & c & b \\ b & a+c & b+c \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

إذن : $B_2 = (I; J; K)$ أساس ل E

3- لنبين أن : $(E; +; \times)$ حلقة واحدة

أ- نبين أن : $(E; +)$ زمرة جزئية من $(M_3(\mathbb{R}); +)$

و بما أن : $(M_3(\mathbb{R}); +)$ زمرة تبادلية

فإن : $(E; +)$ زمرة تبادلية (1)

ب- نبين أن : $(E; \times)$ جزء مستقر من $(M_3(\mathbb{R}); \times)$

و بما أن : $(M_3(\mathbb{R}); \times)$ تجميعي تبادلي يقبل عنصرا محايدا I و $I \in E$

و $\times$ توزيعي بالنسبة ل $+$ في $M_3(\mathbb{R})$

فإن : $(E; \times)$ تجميعي تبادلي يقبل عنصرا محايدا I

و $\times$ توزيعي بالنسبة ل $+$ في E (2)

من (1) و (2) : $(E; +; \times)$ حلقة واحدة

نعتبر : $x=0$ نجد : $a=b$

إذن : $\forall x \in]-1; 1[\quad a \left(\frac{1}{(x-1)} + \frac{1}{(x+1)} \right) = 0$

ومنه : $\forall x \in]-1; 1[\quad a \times \frac{2x}{x^2-1} = 0$

إذن : $a=0$

ومنه : $a=b=0$

إذن : B أسرة حرة

بما أن : B أسرة مولدة ل E و حرة

فإن : B أساس للفضاء المتجهي E

إذن : $\dim E = \text{card} B$

$\dim E = 2$

تمرين 11

$B_1 = (\vec{u}_1; \vec{u}_2; \vec{u}_3)$ أساس في فضاء متجهي حقيقي E بُعد 3

$B_2 = (\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3)$ أسرة بحيث :

$$\begin{cases} \vec{e}_1 = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \\ \vec{e}_2 = \vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3 \\ \vec{e}_3 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3 \end{cases}$$

1- بين أن B_2 أساس في E

2- $\vec{u} (1; 2; 3)_{B_1}$ في الأساس B_1 أوجد احداثيات $\vec{u}$ في الأساس B_2

الحل

1- لدينا : $(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3) = (\vec{e}_1(1;1;1); \vec{e}_2(1;-2;-1); \vec{e}_3(2;-1;1))$ في الأساس B_1

و $\dim E = 3$ و $\text{card} B_2 = 3$

إذن : $\dim E = \text{card} B_2$

ومنه : للبرهنة أن B_2 أساس في E

يكفي أن نبرهن أن : B_2 حرة

لدينا : $\det(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 3$

بما أن : $\det(\vec{e}_1; \vec{e}_2; \vec{e}_3) \neq 0$ فإن : B_2 حرة

ومنه : B_2 أساس في E

2- $\vec{u} (1; 2; 3)_{B_1}$ في الأساس B_1 أوجد احداثيات $\vec{u}$ في الأساس B_2

نعتبر : $\vec{u} (a; b; c)_{B_2}$ في الأساس B_2

إذن :

$$\vec{u} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3$$

$$\vec{u} = a(\vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3) + b(\vec{u}_1 - 2\vec{u}_2 - \vec{u}_3) + c(2\vec{u}_1 - \vec{u}_2 + \vec{u}_3)$$

$$\vec{u} = (a+b+c)\vec{u}_1 + (a-2b-c)\vec{u}_2 + (a-b+c)\vec{u}_3$$

$$M^{-1} = \frac{1}{12} \begin{pmatrix} -7 & -15 & 17 \\ 6 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{aligned} J^3 &= I + J \quad (\text{الحساب}) \\ J^3 &= I + J \Rightarrow J^{-1}J^3 = J^{-1}I + J^{-1}J \\ &\Rightarrow J^2 = J^{-1} + I \\ &\Rightarrow J^{-1} = I - J^2 \\ &\Rightarrow J^{-1} = I - K \\ J^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ومنه :} \\ J^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

تمرين 13

حدد : M^{-1}

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad -2 \quad M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad -1$$

الحل

$$-1 \quad \text{تحديد : } M^{-1} \text{ بحيث : } M = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\det M = \frac{1}{2}$$

$${}^t \text{Com}(M) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad \text{Com}(M) = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \times {}^t(\text{com}M) \quad \text{لدينا :}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{إذن :}$$

$$-2 \quad \text{تحديد : } M^{-1} \text{ بحيث : } M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\det M = 12$$

$$\text{Com}(M) = \begin{pmatrix} -7 & 6 & -1 \\ -15 & 6 & 3 \\ 17 & -6 & -1 \end{pmatrix}$$

$${}^t \text{Com}(M) = \begin{pmatrix} -7 & -15 & 17 \\ 6 & 6 & -6 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{\det M} \times {}^t(\text{com}M) \quad \text{لدينا :}$$