

الدوال الأسية

السلسلة 1

التمرين الأول :

في الشكل أسفله (C_f) هو التمثيل المباني في معلم متعدد منظم $(\vec{r}, \vec{i}, \vec{j})$ لدالة عددية f معروفة وقابلة للاشتاق على \mathbb{R}^* .
عما أن (C_f) يقبل :

- فرعا شلجميا باتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$
- محور الأراتيب مقاربا عموديا
- المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = -x$ مقاربا مالا بجوار $+\infty$

(أنظر الشكل)
من خلال قراءتك للمبيان :

أ. حدد النهايات التالية :

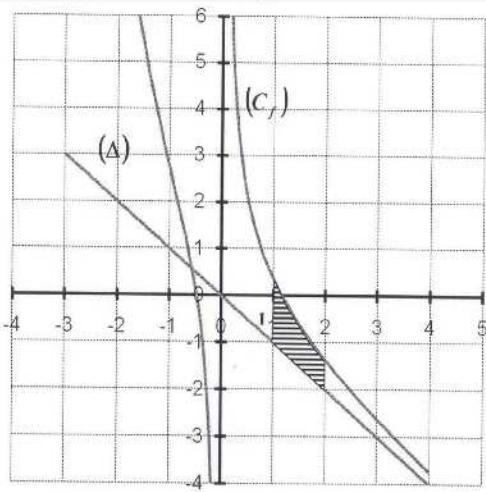
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$$

ب. اعط جدول تغيرات f على مجموعة تعريفها

ج. اعط إشارة $f(x) + x$ على المجال $[0, +\infty]$

د. اعط عدد حلول المعادلة $f(x) = -x$ على \mathbb{R}^*

2. أحسب مساحة الحيز المخض في المبيان إذا علمت أن $f(x) = e^{-x} - x + \frac{1}{x}$ لكل x من



التمرين الثاني :

الجزء الأول

نعتبر الدالة g للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

(1) أحسب $(g'(x))$ لكل x من \mathbb{R} ثم اعط جدول تغيرات الدالة

(2) استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}

الجزء الثاني

نعتبر الدالة f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي :

و ليكن (C_f) منحها في معلم متعمد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) .

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

ب- بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ (يمكّن وضع $t = -x$)

(2) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x - 1$ مقارب مثل المنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

(3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

(4) أ- بين أن $(f'(x)) = g(x)$ لكل x من \mathbb{R}

ب- اعط جدول تغيرات الدالة f

(5) أدرس تقرّب المنحنى (C_f) محدداً نقط انعطافه

(6) أ- حدد معادلة المساس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أقصولها 0

ب- أنشئ (T) و (C_f) (نأخذ $e^{-1} \simeq 0,36$)

(7) أ- باستعمال مكملة بالأجزاء، أحسب $\int_0^2 (x+1)e^{-x} dx$

ب- أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيمات اللذين معادلاتها : $y = x - 1$ و $y = 0$ و $x = 2$ و $x = 0$

الجزء الثالث

نعتبر المتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

(1) بين أن $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من N

(2) بين أن المتالية (u_n) تنقصصية

(3) استنتاج أن المتالية (u_n) متقاربة و حدد نهايتها.

التمرين الثالث :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x) = 2x + \frac{e^x}{e^x - 1}$

1) حدد D_f

2) أحسب نهايات f عند محدودات D_f

3) أدرس تغيرات f و اعط جدول تغيراتها

4) أدرس الفروع الانهائية للمنحنى (C_f)

5) بين أن النقطة $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى (C_f)

6) أنشئ (C_f)

7) أحسب مساحة الحيز المحصور بين (C_f) ذي المعادلة $y = 2x$ و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $x = 1$ و $x = \ln 2$

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0, +\infty]$ بما يلي : $f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$. و لیکن (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعمد منظم (O, \vec{i}, \vec{j}) . (وحدة القياس 4cm)

الجزء الأول

لتکن الدالة g المعرفة بما يلي :

1) أدرس تغيرات g على $[0, +\infty]$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$

2) أ- بين أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلًا وحيدًا α في $[0, +\infty]$

ب- تحقق أن $1,14 < \alpha < 1,15$

3) أدرس إشارة g على $[0, +\infty]$

الجزء الثاني

1) أ- بين أن لكل x من $[0, +\infty]$ $f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$

ب- استنتج تغيرات f على $[0, +\infty]$

2) أ- بين أن لكل $x \geq 0$ $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

ب- أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و أول هندسيا النتيجة

3) أ- بين أن $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha + 1}$

ب- اعط تطبيقات $f(\alpha)$ سعته 10^{-2}

4) حدد معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأفصول 0

- 5) أ- بين أن لكل x من $[0, +\infty]$ حيث $f(x) = e^x - xe^x - 1$: $\frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$
 ب- أدرس تغيرات الدالة u على $[0, +\infty]$ واستنتج إشارة $u(x)$ على $[0, +\infty]$
 ج- أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و (T)
 (6) أنشئ (C_f) و (T)

الجزء الثالث

- (1) حدد دالة أصلية ل f على $[0, +\infty]$ (يمكنك استعمال الجزء الثاني للسؤال 2)
 (2) نرمز ب \mathcal{D} الحيز المحصور بين (C_f) و (T) و المستقيمين اللذين معادلتها $x=0$ و $x=1$ أحسب ب cm^2 المساحة \mathcal{A} للحيز \mathcal{D}
 (3) لكل n من N ، نضع $v_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$
 أ- أحسب v_0 ، v_1 و v_2
 ب- أول هندسيا v_n
 ج- بين أن لكل $n \geq 2$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq f(n) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx$

التمرين الخامس :

- I. لتكن g الدالة العدبية المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :
 1) أحسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
 2) أ- أحسب (g') لكل x من \mathbb{R}
 ب- أدرس تغيرات g و استنتاج أن $g(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}
- II. نعتبر الدالة العدبية f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :
 $f(x) = \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x}$ و ليكن (C_f) منحناها في معلم متعدد منظم (O, \bar{i}, \bar{j}) . (الوحدة $2cm$)
 1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ثم استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل فرعا شلجميا يتم تحديده اتجاهه بجوار $+\infty$
 ب- أحسب (f') ثم بين أن المستقيم (D) ذي المعادلة $y = \frac{1}{2}x + 1$ مقارب مثل للمنحنى بجوار $+\infty$
 ج- أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D)
 2) بين أن : $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^x}$ لكل x من \mathbb{R} و استنتاج أن f تزايدية قطعا على \mathbb{R}
 3) أ- بين أنه يوجد عدد حقيقي α من المجال $[-1, 0]$ بحيث $f(\alpha) = 0$
 ب- حدد معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأصول 0 .

ج- بين أن : $f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$ لكل x من \mathbb{R} ثم حدد زوج إحداثي I نقطة انعطاف المنحني (C_f)

(4) أنشئ المنحنى (C_f) (نأخذ $\ln 2 \approx 0,7$ و $2e^{-2} \approx 0,27$)

(5) باستعمال متكاملة بالأجزاء بين أن : $\int_0^2 xe^{-x} dx = 1 - \frac{3}{e^2}$

(6) احسب ب cm^2 مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاسيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x=2$ و $x=0$.

تصحيح التمرين الأول

أ.1 (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^+ \\ x > 0}} f(x) = +\infty$

(C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$ $\lim_{\substack{x \rightarrow 0^- \\ x < 0}} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

(C_f) يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

(C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = -x$ بجوار $+\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 0$

ب. جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	-	
$f(x)$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

ج. على المجال $[0, +\infty]$ لدينا (C_f) يوجد فوق المستقيم $y = -x$

$$f(x) + x \geq 0 \quad \text{إذن } f(x) - (-x) \geq 0$$

د. عدد حلول المعادلة $f(x) = -x$ على \mathbb{R}^*

لدينا (C_f) و (Δ): $y = -x$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة $f(x) = -x$: حل وحيدا في \mathbb{R}^* .

2. مساحة الحيز المدخش في المبيان هي مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم $y = -x$: (Δ) و المستقيمين اللذين معادلاتها

$$x = 2 \quad \text{و } x = 1$$

$$A = \int_1^2 |f(x) - (-x)| dx. (U.A)$$

و بما أن $f(x) + x \geq 0$ على المجال $[0, +\infty]$

$$A = \int_1^2 (f(x) + x) dx. (U.A)$$

$$A = \int_1^2 \left(e^{-x} + \frac{1}{x} \right) dx. (U.A)$$

$$\text{إذن: } A = \left[-e^{-x} + \ln x \right]_1^2. (U.A)$$

$$\text{و منه: } A = (e^{-1} - e^{-2} + \ln 2). (U.A)$$

تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول :

(1) الدالة g قبلة للإشتقاق على \mathbb{R}
ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-xe^{-x} + 1)' \\ &= (-x)'e^{-x} + (-x)(e^{-x})' + 0 \\ &= -e^{-x} - x \cdot (-e^{-x}) \\ &= -e^{-x} + xe^{-x} \\ &= (x-1)e^{-x} \end{aligned}$$

لدينا : $x-1 > 0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة e^{-x}

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$(e-1)/e$	1

(2) لدينا (1) g هي القيمة الدنيا للدالة g على \mathbb{R}

إذن لكل x من \mathbb{R} :

$g(x) \geq g(1)$ إذن لكل x من \mathbb{R}

ومنه لكل x من \mathbb{R} $g(x) > 0$ لأن $\frac{e-1}{e} > 0$

الجزء الثاني :

أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x - 1 + (x+1)e^{-x} = -\infty$ (1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \infty} x - 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} x + 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right. \text{ لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + (x+1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + xe^{-x} + e^{-x} = +\infty \quad \text{بـ لدينا :}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -te^t = 0 & \left(\begin{array}{l} t = -x \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \end{array} \right) \text{ لأن} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} + e^{-x} = 0 \quad (2)$$

إذن : (Δ) ذي المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{بـ لدينا :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 + (x+1)e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-x} = +\infty \quad \text{و}$$

إذن (C_f) يقبل فرعاً شلجمياً في اتجاه محور الأراتيب بجوار $-\infty$.

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - (x-1) = (x+1)e^{-x}$$

لدينا : $e^{-x} > 0$ إذن إشارة $f(x) - (x-1)$ هي إشارة

\checkmark على المجال $[x+1, +\infty]$ إذن $x+1 \geq 0$: $f(x) - (x-1) \geq 0$ و منه $f(x) - (x-1) \geq 0$ على المجال (C_f) يوجد فوق

\checkmark على المجال $[-\infty, x+1]$ إذن $x+1 \leq 0$: $f(x) - (x-1) \leq 0$ و منه $f(x) - (x-1) \leq 0$ على المجال (C_f) يوجد تحت (Δ)

أـ الدالة f قابلة للاشتغال على \mathbb{R} :

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1+(x+1)e^{-x})' \\ &= 1+(x+1)'e^{-x} + (x+1)(e^{-x})' \\ &= 1+1.e^{-x} - (x+1)e^{-x} \\ &= 1+e^{-x}.(1-x-1) \\ &= 1-xe^{-x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = g(x)$ لكل x من \mathbb{R}

بـ لدينا حسب الجزء الأول : $g(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}

إذن : $f'(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}

و منه f تزايدية قطعاً على \mathbb{R}

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(5)

ل يكن $x \in \mathbb{R}$

لدينا $f''(x) = g'(x)$ إذن $f'(x) = g(x)$

و منه على المجال $[1, +\infty]$ إذن (C_f) محدب

و على المجال $[-\infty, 1]$ إذن (C_f) مقعر

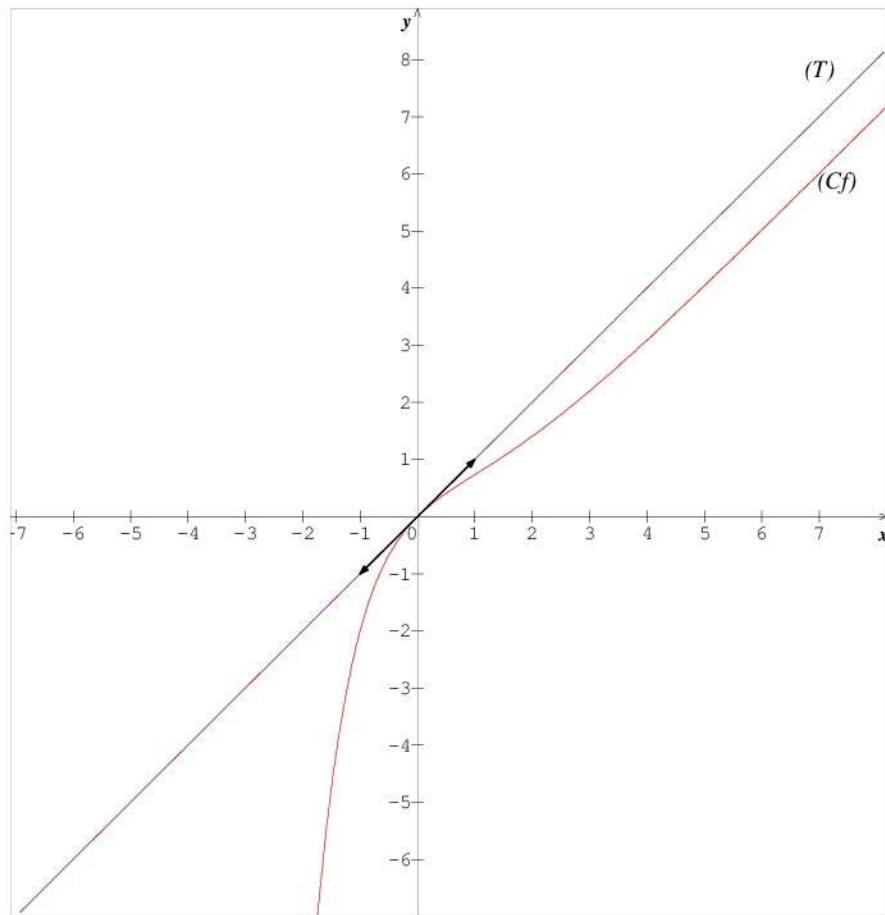
وبما أن f'' تتعدم و تغير إشارتها عند العدد 1 فلن النقطة $I(1, f(1))$ هي نقطة انعطاف لمنحنى (C_f) .

(6) أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أقصولها 0 :

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

$$\text{إذن : } y = x \quad \text{أي} \quad y = 1 \cdot (x) + 0$$

- ب-



7) أ- باستعمال مكملة بالأجزاء ، لنحسب $\int_0^2 (x+1)e^{-x} dx$

$$\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \leftarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \nearrow$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x+1)e^{-x} dx &= \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x} dx \\ &= \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^2 - \left[e^{-x} \right]_0^2 \\ &= (-3e^{-2} + 1) - (e^{-2} - 1) \\ &= 2 - 4e^{-2} \end{aligned}$$

ب- مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيمات اللتين معادلاتها : $y = x - 1$ و $x = 0$ و $x = 2$
 $f(x) - (x-1) \geq 0$ على المجال $[0, 2]$:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |f(x) - (x-1)| dx .(UA) \\ &= \int_0^2 (f(x) - (x-1)) dx .(UA) \\ &= \int_0^2 (x+1)e^{-x} dx .(UA) \\ &= (2 - 4e^{-2}) .(UA) \end{aligned}$$

الجزء الثالث:

(1)

: $n = 0$ من أجل ✓

لدينا $u_0 = 1$

إذن $0 \leq u_0 \leq 1$

: $n \in \mathbb{N}$ ليكن ✓

نفترض أن $0 \leq u_n \leq 1$ •

و نبين أن $0 \leq u_{n+1} \leq 1$ •

لدينا $0 \leq u_n \leq 1$ ولدينا f تزايدية على المجال $[0, 1]$

إذن : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$

إذن : $0 \leq u_{n+1} \leq 2e^{-1} \leq 1$

نستنتج : $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من \mathbb{N} ✓

: $n \in \mathbb{N}$ ليكن (2)

لدينا على المجال $[0, 1]$: $f(x) \leq x$

و بما أن $f(u_n) \leq u_n$ فلن $u_n \in [0,1]$

و منه لكل n من N :

و بالتالي (u_n) تنقصية .

(3)

✓ بما أن (u_n) تنقصية و مصغورة فلن (u_n) متقاربة

✓

f متصلة على المجال $[0,1]$ •

$$f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0, 2e^{-1}] \subset [0,1] \quad •$$

(u_n) متقاربة •

إذن نهاية (u_n) هي حل للمعادلة

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$$

و منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

تصحيح التمرين الثالث

(1)

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / e^x \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \\ &=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\end{aligned}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{cases} : \text{لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - 1 = 0^- \end{cases} : \text{لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 1 = 0^+ \end{cases} : \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases} : \text{لأن}$$

(3) لندرس تغيرات f

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f

: $x \in D_f$ ليكن

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right)' \\
 &= 2 + \frac{(e^x)'(e^x - 1) - e^x(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} \\
 &= 2 + \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} \\
 &= 2 + \frac{e^{2x} - e^x - e^{2x}}{(e^x - 1)^2} \\
 &= \frac{2(e^x - 1)^2 - e^x}{(e^x - 1)^2} \\
 &= \frac{2(e^{2x} - 2e^x + 1) - e^x}{(e^x - 1)^2} \\
 &= \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2}
 \end{aligned}$$

لدينا : $2e^{2x} - 5e^x + 2 > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $(e^x - 1)^2$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$2e^{2x} - 5e^x + 2$	+	0	-	-	+

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$-2\ln(2)-1$	$+\infty$	$2\ln(2)+2$	$+\infty$

(4)

$$x = 0 \text{ يقبل مقاربا عموديا معاناته } (C_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \end{cases} \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} : \text{لنصب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \frac{e^x}{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{e^x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = 2$$

$$: \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x : \text{لنصب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$$

+∞ يقبل مقارباً مائلاً معادلته $y = 2x + 1$ بجوار

$$x \in D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\quad (5)$$

$2(0) - x = -x \in D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ من الواضح أن :

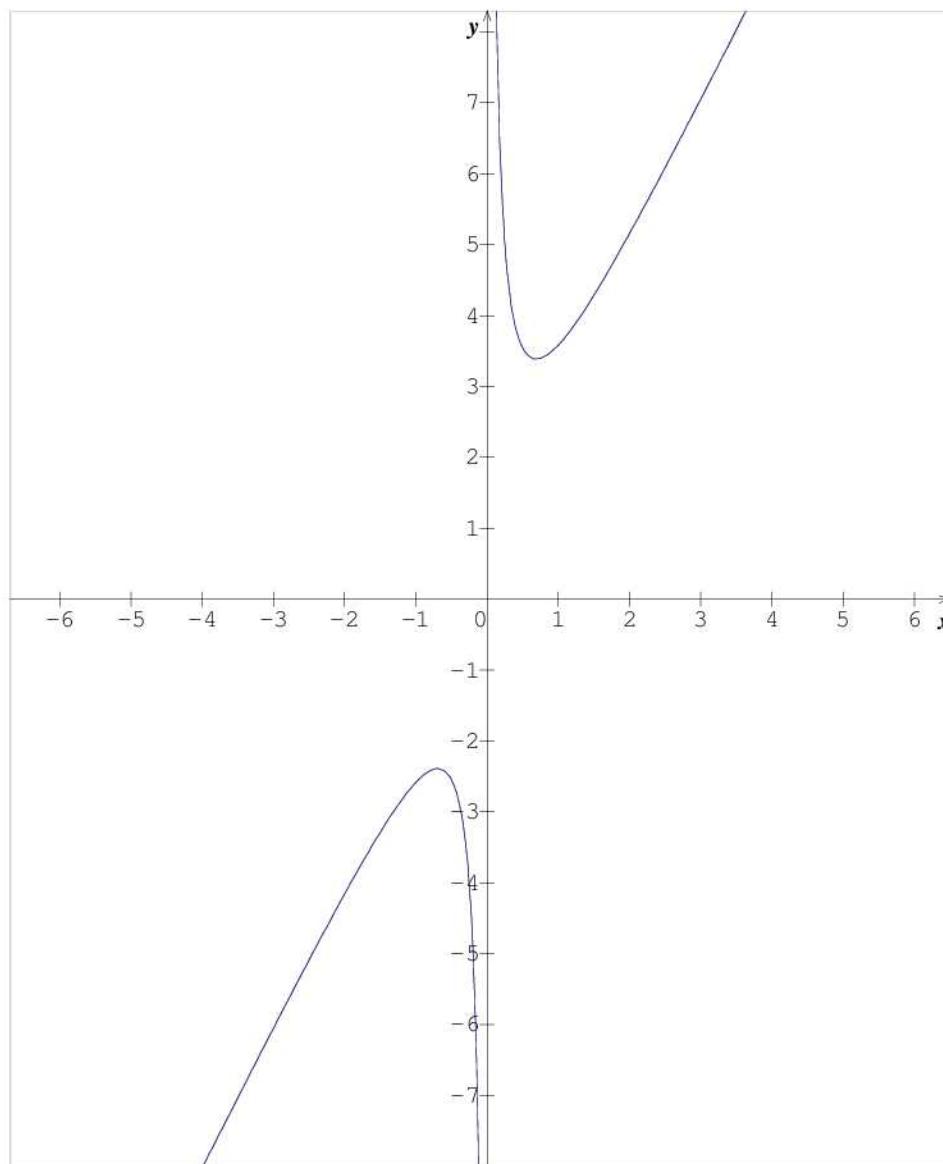
$$f(2(0) - x) = f(-x) = -2x + \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} = -2x + \frac{1}{1 - \frac{1}{e^{-x}}} = -2x + \frac{1}{1 - e^x} \quad \checkmark$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) = 1 - \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1}\right) = -2x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} = -2x + \cancel{e^x} - 1 \cancel{e^x} = -2x + \frac{1}{1 - e^x}$$

$$f(2(0) - x) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) : \text{إذن}$$

. (C_f) مركز تسلق للمنحنى $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ و منه النقطة

(6)



7) مساحة الحيز المحصور بين (C_f) ذي المعادلة $y = 2x$ و المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = \ln 2$

$$\begin{aligned}
 A &= \int_{\ln 2}^1 |f(x) - 2x| dx .(UA) \\
 &= \int_{\ln 2}^1 \frac{e^x}{e^x - 1} dx .(UA) \\
 &= \int_{\ln 2}^1 \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} dx .(UA) \\
 &= \left[\ln|e^x - 1| \right]_{\ln 2}^1 .(UA)
 \end{aligned}$$

$$A = \ln(e - 1) \cdot (UA)$$

تصحيح التمارين الرابع :

الجزء الأول
(1)

• ليكن $x \in [0, +\infty[$

$$g'(x) = (x + 2 - e^x)' = 1 - e^x$$

لدينا : $e^x \geq e^0$ إذن $x \geq 0$
 $e^x \geq 1$ إذن
 $-e^x \leq -1$ إذن
 $1 - e^x \leq 0$ إذن

و منه $\forall x \in [0, +\infty[\quad g'(x) \leq 0$

و لدينا : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

و بالتالي الدالة g تنقصصية قطعا على $[0, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x}\right) = -\infty \quad •$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \quad : \text{ لأن} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{cases}$$

(2) أ- ثبّت أن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلّاً وحيداً α في المجال $[0, +\infty[$ بما أن :

- ✓ الدالة g متصلة على $[0, +\infty[$ (مجموع دوال متصلة على $[0, +\infty[$)
- ✓ الدالة g تنقصصية قطعا على $[0, +\infty[$

$0 \in g([0, +\infty[)$ إذن $g([0, +\infty[) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), g(0) = [-\infty, 1]$ لدينا: ✓

فإن المعادلة $0 = g(x)$ تقبل حلّاً وحيداً α في المجال $[0, +\infty[$

ب- لدينا :
 $[1,14; 1,15] \quad g$ متصلة على $[1,14; 1,15]$ ✓

$$\frac{g(1,14) \times g(1,15) < 0}{\text{إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : } 1,14 < \alpha < 1,15} \quad \checkmark$$

جـ

الحلقة 1: إذا كان $x \geq \alpha$ ✓
 نعلم أن g تناظرية قطعاً على $[0, +\infty]$
 إذن $g(x) \leq g(\alpha)$
 و منه $(g(\alpha) = 0 \text{ لأن } g(x) \leq 0)$

الحلقة 2: إذا كان $0 \leq x \leq \alpha$ ✓
 نعلم أن g تناظرية قطعاً على $[0, +\infty]$
 إذن $g(x) \geq g(\alpha)$
 و منه $(g(\alpha) = 0 \text{ لأن } g(x) \geq 0)$

الجزء الثاني

: $x \in [0, +\infty]$ أـ ليمكن

الدالة f قبلة للاشتقاق على $[0, +\infty]$

$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \right)' = \frac{(e^x - 1)'(xe^x + 1) - (e^x - 1)(xe^x + 1)'}{(xe^x + 1)^2}$ لدينا :

$f'(x) = \frac{e^x \cdot (xe^x + 1) - (e^x - 1)((x)e^x + x(e^x)') + 0}{(xe^x + 1)^2}$ إذن :

$f'(x) = \frac{e^x \cdot (xe^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + xe^x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x \cdot (xe^x + 1) - (e^x - 1)(1+x)e^x}{(xe^x + 1)^2}$ إذن :

$f'(x) = \frac{e^x \cdot [(xe^x + 1) - (e^x - 1)(1+x)]}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x [xe^x + 1 - e^x - xe^x + 1 + x]}{(xe^x + 1)^2}$ إذن :

$f'(x) = \frac{e^x [x + 2 - e^x]}{(xe^x + 1)^2}$ إذن :

$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2} : [0, +\infty]$ و منه : لكل x من $[0, +\infty]$

بـ على المجال $[0, \alpha]$

لدينا : $(xe^x + 1)^2 > 0$ و $e^x > 0$

و حسب نتيجة الجزء الأول للسؤال ج- :
إذن $g(x) \geq 0$ و منه الدالة f تزايدية

على المجال $[\alpha, +\infty]$

لدينا : $(xe^x + 1)^2 > 0$ و $e^x > 0$

و حسب نتيجة الجزء الأول للسؤال ج- :
إذن $g(x) \leq 0$ و منه الدالة f تنقصصية

أ- ليكن $x \in [0, +\infty]$ (2)

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{e^x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{e^x \left(x + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} \quad \text{لدينا :}$$

إذن : لكل $x \geq 0$ $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

-ب-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = 0 \quad \bullet \quad \text{لدينا :}$$

$$\begin{cases} t = -x \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \quad \text{لأن :}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-x} = +\infty \end{cases}$$

بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فلن (C_f) يقبل مقارب أفقى معادله $y = 0$ بجوار ∞ •

أ- ليكن : $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$ (3)

ونعلم أن α حل للمعادلة $g(x) = 0$ إذن : $g(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2 \end{aligned} \quad \text{إذن لدينا :}$$

$$f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{(\alpha + 2) - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1} \quad \text{و منه :}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \quad \text{و بالتالي :}$$

ب- لدينا : $1,14 < \alpha < 1,15$ إذن : $2,14 < 1+\alpha < 2,15$

$$\frac{1}{2,15} < \frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{2,14} \quad \text{إذن :}$$

$$0,46 < \frac{1}{2,15} < \frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{2,14} < 0,47 \quad \text{إذن :}$$

و منه : $0,47 - 0,46 = 0,01 = 10^{-2}$ و هذا تأثير للعدد $f(\alpha)$ سعته $0,46 < f(\alpha) < 0,47$

(4) معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الأصول 0 :

$$y = f'(0).(x-0) + f(0)$$

لدينا : $y = x$ إذن $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ أي

أ- ليكن x من $[0, +\infty[$ (5)

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x \\ &= \frac{e^x - 1 - xe^x - x}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1-x^2)e^x - (1+x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1+x)(1-x)e^x - (1+x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1+x)[(1-x)e^x - 1]}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1+x)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1} \end{aligned}$$

إذن : لكل x من $[0, +\infty[$ حيث $f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$

ب- اندرس تغيرات الدالة u ليكن x من $[0, +\infty[$

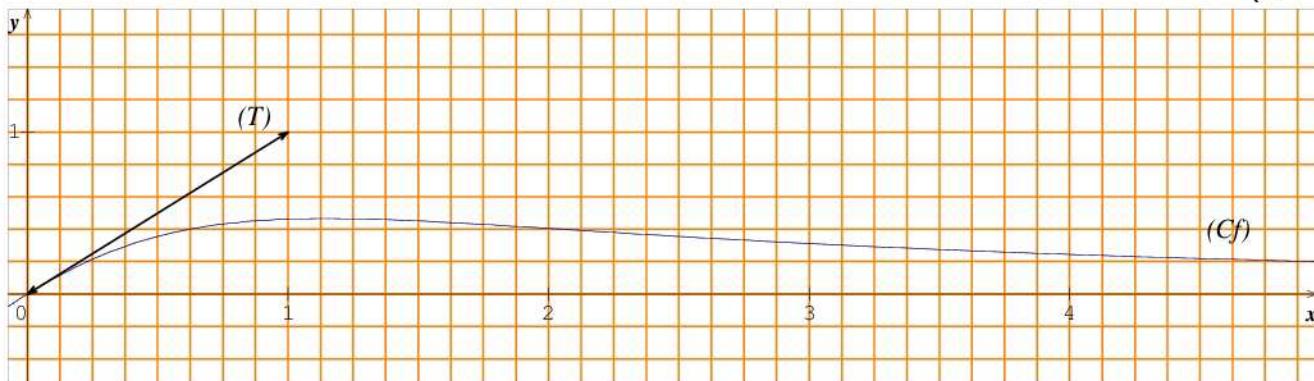
$$\begin{aligned} u'(x) &= (e^x - xe^x - 1)' \\ &= (e^x)' - (xe^x)' + 0 \\ &= e^x - ((x)'e^x + x(e^x)') \\ &= e^x - (e^x + xe^x) \\ &= e^x - e^x - xe^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

لدينا : $x \geq 0$ و $e^x > 0$ إذن : $u'(x) \leq 0$ لكل x من $[0, +\infty]$
إذن الدالة u تنقصصية .
($u(0)=0$) $u(x) \leq 0$ أي : $u(x) \leq u(0)$ لأن $0 \leq x$ و u تنقصصية فلن :
ج - ليكن x من $[0, +\infty]$ لندرس الوضع النسبي ل (C_f) و (T)
لدينا :

$$f(x)-x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x+1}$$

ولدينا $x \geq 0$ إذن $xe^x+1 > 0$ و منه إشارة $f(x)-x$ هي إشارة $u(x)$
و حسب نتيجة لسؤال السبق لدينا : $u(x) \leq 0$ و منه $u(x) \leq 0$ لـ x من $[0, +\infty]$
و بالتالي : (T) يوجد تحت المستقيم (C_f)

(6)



الجزء الثالث

(1) لنحدد دالة أصلية ل f على $[0, +\infty]$ إذن f متصلة على $[0, +\infty]$ إذن f تقبل دالة أصلية F على $[0, +\infty]$ ليكن x من $[0, +\infty]$ لدينا حسب نتائج السؤال (2) في الجزء الثاني :

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

إذن :

$$f(x) = \frac{(x+e^{-x})'}{x+e^{-x}}$$

($x+e^{-x} > 0$) $F(x) = \ln|x+e^{-x}| = \ln(x+e^{-x})$: $[0, +\infty]$ و منه لكل x من $[0, +\infty]$

(2)

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x)-x| dx \times \|i\| \times \|j\| \quad \text{لدينا :}$$

[0, +\infty] \leq 0 \quad \text{لكل } x \text{ من } f(x)-x

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - f(x)) dx \times 4\text{cm} \times 4\text{cm} : \text{فإن}$$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2} - F(x) \right]_0^1 \times 16\text{cm}^2 : \text{إذن}$$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2} - \ln(x + e^{-x}) \right]_0^1 \times 16\text{cm}^2 : \text{إذن}$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-1}) \right) \times 16\text{cm}^2 : \text{إذن}$$

$$\mathcal{A} = (8 - 16\ln(1 + e^{-1})) \text{cm}^2 : \text{و منه}$$

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x) dx \quad \text{أ- لدينا لكل } n \text{ من } N, \text{ نضع} \quad (3)$$

$$v_0 = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = [\ln(x + e^{-x})]_0^1 = \ln(1 + e^{-1})$$

$$v_1 = \int_1^2 f(x) dx = [F(x)]_1^2 = [\ln(x + e^{-x})]_1^2 = \ln(2 + e^{-2}) - \ln(1 + e^{-1})$$

$$v_2 = \int_2^3 f(x) dx = [F(x)]_2^3 = [\ln(x + e^{-x})]_2^3 = \ln(3 + e^{-3}) - \ln(2 + e^{-2})$$

$$\text{ب- لنبين أن لكل } n \geq 2 \quad f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) : n \geq 2$$

• ليكن $x \in \mathbb{R}$ بحيث $n \leq x \leq n+1$ و لدينا f تناقصية على المجال $[2, +\infty]$

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) : \text{إذن}$$

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx : \text{إذن}$$

$$(n+1-n)f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq (n+1-n)f(n) : \text{إذن}$$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) : \text{و منه}$$

• نستنتج مما سبق أن $f(n+1) \leq v_n \leq f(n)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0 : \text{وبما أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 : \text{فإله حسب مبرهنة الدرك}$$

تصحيح التمرين الخامس

I

(1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 2x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 2 + \frac{2}{x} \right) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{cases} \quad \text{لأن:}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2x + 2 = +\infty \quad \checkmark$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 2 = +\infty \end{cases} \quad \text{لأن:}$$

أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على \mathbb{R}

: $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = (e^x - 2x + 2)' = e^x - 2$$

إذن لكل x من \mathbb{R}

-ب-

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 2$$

لندرس إشارة $e^x - 2$

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$ex-2$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة : g

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$4-2\ln 2$	$+\infty$

✓ لدينا $g(\ln 2)$ هي القيمة الدنيا للدالة g على \mathbb{R}

إذن : $g(x) \geq g(\ln 2)$

إذن : $g(x) \geq 4 - 2\ln 2 > 0$
و منه $g(x) > 0$ لـ x من \mathbb{R}

- II
(1)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x} = -\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x + 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \end{array} \right. : \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + e^{-x} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right. : \text{لأن}$$

- (C_f) يقبل فرعاً سلجمياً في اتجاه محور الأراثيب بجوار $-\infty$ \checkmark

- ب-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -te^t = 0 \end{array} \right. : \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \quad : \text{لدينا} \quad \checkmark$$

إذن : (C_f) يقبل المستقيم (D) مقارباً مثلًا معادنته $y = \frac{1}{2}x + 1$ بجوار $+\infty$

ج- لندرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) :
ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$x f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \text{ هي إشارة } e^{-x} > 0 \text{ و بما أن } f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) = xe^{-x} \text{ لدينا}$$

(D) على المجال $[-\infty, 0]$: لدينا $x \leq 0$ إذن $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \leq 0$ و منه (C_f) يوجد تحت

✓ على المجال $[0, +\infty]$ لدينا $x \geq 0$ إن $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \geq 0$ يوجد فوق (D) الدالة f قبلة للإشتقاق على \mathbb{R} :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x} \right)' \\ &= \frac{1}{2} + (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' \\ &= \frac{1}{2} + e^{-x} - xe^{-x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} \\ &= \frac{e^x + 2 - 2x}{2e^x} \\ &= \frac{g(x)}{2e^x} \end{aligned}$$

إذن : \mathbb{R} لكل x من $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^x}$

لدينا : $g(x) > 0$ و $2e^x > 0$ لكل x من \mathbb{R}

إذن $f'(x) > 0$ لكل x من \mathbb{R}
و منه الدالة f تزايدية قطعا على \mathbb{R}

- (3)

متصلة على f ✓

لدينا $f(0) \times f(-1) < 0$ إذن $f(0) = 1 > 0$ و $f(-1) = \frac{1}{2} - e < 0$ ✓

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : يوجد α من المجال $[-1, 0]$ بحيث $f(\alpha) = 0$

ب- معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأقصول 0 :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

ج- ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{g(x)}{2e^x} \right)' \\
 &= \frac{g'(x) \times 2e^x - g(x) \times (2e^x)'}{(2e^x)^2} \\
 &= \frac{(e^x - 2) \times 2e^x - (e^x - 2x + 2) \times 2e^x}{(2e^x)^2} \\
 &= \frac{2e^x [e^x - 2 - e^x + 2x - 2]}{(2e^x)^2} \\
 &= \frac{2x - 4}{2e^x} \\
 &= \frac{x - 2}{e^x}
 \end{aligned}$$

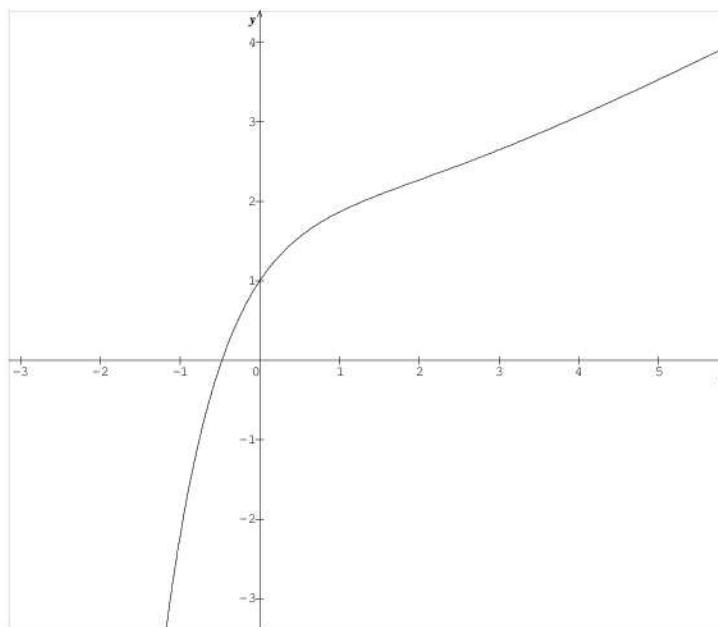
إذن $f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$

لدينا $e^x > 0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة 2

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	-	0	+

بما أن f'' تتعدّم و تغير إشارتها عند العدد 2 فإن النقطة $I(2; 2+2e^{-2})$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

(4)



(5) باستعمال متكاملة بالأجزاء لنحسب :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 xe^{-x} dx &= \left[-xe^{-x} \right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x} dx \\ &= \left[-xe^{-x} \right]_0^2 - \left[e^{-x} \right]_0^2 \\ &= (-2e^{-2} - 0) - (e^{-2} - 1) \\ &= 1 - 3e^{-2} \\ &= 1 - \frac{3}{e^2} \end{aligned}$$

(6) مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاسيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = 0$ و $x = 2$

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |f(x)| dx \cdot \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x} \right) dx .2cm.2cm \\ &= \left(\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx + \int_0^2 xe^{-x} dx \right) .4cm^2 \\ &= \left(\left[\frac{x^2}{4} + x \right]_0^2 + \left(1 - \frac{3}{e^2} \right) \right) .4cm^2 \\ &= \left(3 + 1 - \frac{3}{e^2} \right) .4cm^2 \\ &= \left(16 - \frac{12}{e^2} \right) cm^2 \end{aligned}$$

つづく