سلسلة 1	الحسابيات	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان

- حدد باقي القسمة الإقليدية لـ 145^{2015} على 12
- حدد باقي القسمة الإقليدية لـ 247^{2015} على 7
- حدد باقي القسمة الإقليدية لـ 2015^{2016} على 11
- بين أن : $\forall n\in IN \quad 7/3^{2n}+3\times 2^{n+1}$
- بين أن : $\forall n\in IN^* \quad (n-1)^2/n^{n-1}-1$

تمرين 2 : a و b و c عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان

1) بين أن : $(7a+3)\wedge(9a+4)=1$

2) بين أن : $(9a+4b)\wedge(2a+b)=a\wedge b$

3) مستعملا مبرهنة «Bezout» برهن أن : $a\wedge(bc)=1 \Leftrightarrow \begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1 \end{cases}$

أ) بين أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow (a+b)\wedge ab=1$

ب) بين أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow (a^3-b^3)\wedge(a^2-b^2)=a-b$

ج) بين أن : $(a^2+b^2)\wedge ab=(a\wedge b)^2$

4) مستعملا مبرهنة «Bezout» برهن أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow a^2\wedge b^2=1$

أ) بين أن : $a^2/b^2 \Rightarrow a/b$

ب) بين أن : $a^2\wedge b^2=(a\wedge b)^2$

ج) بين أن : $\sqrt{5}\notin Q$

5) بين بالترجع أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow (\forall n\in IN^* \quad a\wedge b^n=1)$

أ) استنتج أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow (\forall (n,m)\in IN^*\times IN^* \quad a^n\wedge b^m=1)$

ب) بين أن : $\log_{10}(2)\notin Q$

تمرين 3 : حل في Z^2 المعادلات التالية:

$17x+11y=1$	$3x-2y=1$	$10x=14y$
$15x+6y=11$	$10x-2y=6$	$5x-3y=7$

تمرين 4 : a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان .

1) بين أن : $(a+b)\wedge ab=1 \Leftrightarrow a\wedge b=1$

2) استنتج أنه لكل x و y من IN^* : $(x+y)\wedge(x\vee y)=x\wedge y$

3) حل في $IN^*\times IN^*$ النظمة : $\begin{cases} x+y=276 \\ x\vee y=1440 \\ x<y \end{cases}$

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الحسابيات حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 :

لدينا : $145 \equiv 1[12]$ منه : $145^{2015} \equiv 1[12]$ إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 145^{2015} على 12 هو 1

لدينا : $247 \equiv 2[7]$ منه : $247^3 \equiv 8[12]$ منه : $247^3 \equiv 1[17]$ (لأن : $8 \equiv 1[7]$)

علما أن : $2015 = 3\times 671 + 2$ فإن : $\begin{cases} 247^{3\times 671} \equiv 1[7] \\ 247^2 \equiv 2^2[7] \end{cases}$ ومنه : $247^{2015} \equiv 4[7]$

إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 247^{2015} على 7 هو 4

لدينا : $2015 \equiv 2[11]$ منه : $2015^5 \equiv 32[11]$ منه: $2015^5 \equiv -1[11]$ (لأن : $32 \equiv -1[11]$)

علما أن : $2016 = 5\times 403 + 1$ فإن : $\begin{cases} 2015^{5\times 403} \equiv (-1)^{403} \equiv -1[11] \\ 2015 \equiv 2[11] \end{cases}$ ومنه : $2015^{2016} \equiv -2 \equiv 9[11]$

إذن باقي القسمة الإقليدية لـ 2015^{2016} على 11 هو 9

لدينا : $9 \equiv 2[7]$ منه : $9^n \equiv 2^n[7]$ منه: $9^n + 3\times 2^{n+1} \equiv 2^n + 3\times 2^{n+1}[7]$ منه : $9^n + 3\times 2^{n+1} \equiv 7\times 2^n \equiv 0[7]$

بالتالي : $\forall n \in IN \quad 7/3^{2n} + 3\times 2^{n+1}$

بالنسبة للقيم $n=1$ و $n=2$ العبارة صحيحة، الآن ليكن : $n>2$

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 1[n-1] \\ n &\equiv 1[n-1] \\ n^k &\equiv 1[n-1] \\ \dots &\equiv \dots \\ n^{n-2} &\equiv 1[n-1] \end{aligned}$$

لدينا : $n^{n-1} - 1 = (n-1)(n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1)$ وبما أن : $n^k \equiv 1[n-1]$ (لأن : $n \equiv 1[n-1] \Rightarrow n^k \equiv 1[n-1]$)

فإن : $n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1 \equiv n-1 \equiv 0[n-1]$ منه : $n-1 / n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1$

منه : $\exists m \in Z / \ n^{n-2} + n^{n-3} + \dots + n + 1 = m(n-1)$ منه : $n^{n-1} - 1 = m(n-1)^2$

بالتالي : $\forall n \in IN^* \quad (n-1)^2 / n^{n-1} - 1$

تمرين 2 :

1

نضع: $d = (7a+3)\wedge(9a+4)$

منه : $\begin{cases} d/7a+3 \\ d/9a+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/63a+27 \\ d/63a+28 \end{cases} \Rightarrow d/(63a+28)-(63a+27) \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$

بالتالي : $(7a+3)\wedge(9a+4) = 1$

2

نضع : $d = a\wedge b$ و $\delta = (9a+4b)\wedge(2a+b)$

منه : $\begin{cases} d/a \\ d/b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2a \ \ et \ d/9a \\ d/b \ \ et \ \ d/4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/2a+b \\ d/9a+4b \end{cases} \Rightarrow d/\delta$

و : $\begin{cases} \delta/2a+b \\ \delta/9a+4b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/8a+4b \ \ et \ \delta/9a+4b \\ \delta/18a+9b \ \ et \ \delta/18a+8b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/a \\ \delta/b \end{cases} \Rightarrow \delta/d$

منه : $\delta = d$ أي : $(9a+4b)\wedge(2a+b) = a\wedge b$

3

لدينا من جهة : $\begin{cases} a\wedge b = 1 \\ a\wedge c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\,u + b(cv) = 1 \\ a\,u + c(bv) = 1 \end{cases} \Rightarrow a\,u + bc\,v = 1 \ / \ \exists(u,v)\in Z^2 \Rightarrow a\wedge(bc) = 1$

$$\begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\exists(u_1,v_1)\in Z^2 \ / \ a u_1+b v_1=1 \\ \exists(u_2,v_2)\in Z^2 \ / \ a u_2+c v_2=1\end{cases} \Rightarrow (a u_1+b v_1)(a u_2+c v_2)=1$$

وعكسيا :

$$\Rightarrow (a u_1 u_2+c v_2 u_1+b v_1 u_2)a+(v_1 v_2)bc=1$$

$$\begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1\end{cases} \Rightarrow a\wedge(bc)=1$$

بالتالي : $\begin{cases} a\wedge b=1 \\ a\wedge c=1\end{cases} \Leftrightarrow a\wedge(bc)=1$

أ) ليكن : $a\wedge b=1$ ، نضع : $d=(a+b)\wedge a$ و $\delta=(a+b)\wedge b$

لدينا : $d=(a+b)\wedge a \Rightarrow \begin{cases} d/a+b \\ d/a\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/b \\ d/a\end{cases} \Rightarrow d/a\wedge b \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1 \Rightarrow (a+b)\wedge a=1$

و : $\delta=(a+b)\wedge b \Rightarrow \begin{cases} \delta/a+b \\ \delta/b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/a \\ \delta/b\end{cases} \Rightarrow \delta/a\wedge b \Rightarrow \delta/1 \Rightarrow \delta=1 \Rightarrow (a+b)\wedge b=1$

الآن : $\begin{cases} (a+b)\wedge a=1 \\ (a+b)\wedge b=1\end{cases} \Rightarrow (a+b)\wedge ab=1$

ب) ليكن : $a\wedge b=1$

لدينا : $(a^3-b^3)\wedge(a^2-b^2)=(a-b)(a^2+ab+b^2)\wedge(a-b)(a+b)=(a-b)\left((a^2+ab+b^2)\wedge(a+b)\right)$

نضع : $d=(a^2+ab+b^2)\wedge(a+b)$ ، منه و باستعمال نتيجة السؤال السابق نجد :

$$\begin{cases} d/a+b \\ d/(a+b)^2-ab\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/(a+b)^2 \\ d/(a+b)^2-ab\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a+b \\ d/ab\end{cases} \Rightarrow d/(a+b)\wedge ab \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

بالتالي : $a\wedge b=1 \Rightarrow (a^3-b^3)\wedge(a^2-b^2)=a-b$

ج) نضع : $d=a\wedge b$ منه : $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \ \begin{cases} a=\alpha d \\ b=\beta d\end{cases} / \alpha\wedge\beta=1$

منه : $(a^2+b^2)\wedge ab=\left(d^2(\alpha^2+\beta^2)\right)\wedge d^2\alpha\beta=d^2\left((\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha\beta\right)$

نضع : $d=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha$ و $\delta=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta$

لدينا حسب نتيجة سابقة : $\alpha\wedge\beta=1 \Rightarrow \begin{cases} \alpha\wedge\beta=1 \\ \alpha\wedge\beta=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\wedge\beta\times\beta=1 \\ \alpha\times\alpha\wedge\beta=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha\wedge\beta^2=1 \\ \alpha^2\wedge\beta=1\end{cases}$

منه : $d=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha \Rightarrow \begin{cases} d/\alpha^2+\beta^2 \\ d/\alpha\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/\alpha^2+\beta^2 \\ d/\alpha^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/\beta^2 \\ d/\alpha\end{cases} \Rightarrow d/\alpha\wedge\beta^2 \Rightarrow d=1$

و : $\delta=(\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2+\beta^2 \\ \delta/\beta\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2+\beta^2 \\ \delta/\beta^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta/\alpha^2 \\ \delta/\beta\end{cases} \Rightarrow \delta/\alpha^2\wedge\beta \Rightarrow \delta=1$

الآن : $\begin{cases} (\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha=1 \\ (\alpha^2+\beta^2)\wedge\beta=1\end{cases} \Rightarrow (\alpha^2+\beta^2)\wedge\alpha\beta=1$ بالتالي : بين أن : $(a^2+b^2)\wedge ab=d^2=(a\wedge b)^2$

لدينا :

$$a\wedge b=1 \Rightarrow \exists(u,v)\in Z^2 \ / \ au+bv=1 \Rightarrow au=1-bv \Rightarrow a^2u^2=1-2bv+b^2v^2$$

$$\Rightarrow 2bv=1+b^2v^2-a^2u^2 \Rightarrow 4b^2v^2=1+b^4v^4+a^4u^4+2b^2v^2-2a^2u^2-2a^2b^2u^2v^2$$

$$\Rightarrow a^2(2u^2+2b^2u^2v^2-a^2u^4)+b^2(2v^2-b^2v^4)=1$$

$$a\wedge b=1 \Rightarrow a^2\wedge b^2=1$$

4

أ) ليكن : a^2/b^2 و نضع : $d=a\wedge b$

إذن : $\exists k\in IN^2 \ \ b^2=ka^2$ و $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \ \begin{cases} a=\alpha d \\ b=\beta d\end{cases} / \alpha\wedge\beta=1$

منه : $d^2\beta^2=kd^2\alpha^2$ منه : $\beta^2=k\alpha^2$ منه : α^2/β^2 وحيث أن : α^2/α^2 فإن: $\alpha^2/\alpha^2\wedge\beta^2$

وبما أن : $\alpha \wedge \beta = 1 \Rightarrow \alpha^2 \wedge \beta^2 = 1$ فإن : $\alpha^2 / 1$ منه: $\alpha = 1$

منه : $\begin{cases} a = d \\ b = \beta d \end{cases}$ منه : $b = a d$ بالتالي : a / b

ب) بوضع : $d = a \wedge b$ نستنتج أن : $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \; \begin{cases} a=\alpha d \\ b=\beta d \end{cases} / \alpha \wedge \beta = 1$

و باستعمال نتيجة السؤال ج) نجد: $a^2 \wedge b^2 = d^2(\alpha^2 \wedge \beta^2) = d^2 \times 1 = d^2 = (a\wedge b)^2$

ج) نفترض أن : $\sqrt{5} \in Q$ إذن : $\exists(a,b)\in IN \times IN^* \;/\; \sqrt{5} = \frac{a}{b}$ منه : $5b^2 = a^2$ منه: b^2 / a^2

وباستعمال نتيجة السؤال أ) نستنتج أن : b/a منه : $\exists k \in IN \,/\, a = kb$ منه : $5b^2 = k^2 b^2$

منه : $5 = k^2$ وبما أن: $4 < 5 < 9$ فإن : $4 < k^2 < 9$ منه : $2 < k < 3$ و هذا غير ممكن

بالتالي : $\sqrt{5} \notin Q$

5

أ) ليكن $a \wedge b = 1$ و لنبين بالترجع أن : $\left(\forall n \in IN^* \quad a \wedge b^n = 1 \right)$

بالنسبة لـ $n = 1$: العبارة صحيحة

الآن نفترض أن : $a \wedge b^n = 1$ ولنبين أن: $a \wedge b^{n+1} = 1$

باستعمال نتيجة السؤال 3) نجد بسهولة أن : $\begin{cases} a \wedge b^n = 1 \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow a \wedge b^n \times b = 1 \Rightarrow a \wedge b^{n+1} = 1$

و هذا ينهي البرهان.

يجب الانتباه جيدا للعبارة، الافتراض لا يجب أن يتم على العبارة ككل بل على نتيجة الاستلزام فقط (إنه المنطق الرياضي)

ب) ليكن : $(n,m) \in IN^* \times IN^*$ ، باستعمال نتيجة السؤال السابق مرتين نجد أن:

استنتج أن : $a \wedge b = 1 \Rightarrow a \wedge b^m = 1 \Rightarrow b^m \wedge a = 1 \Rightarrow b^m \wedge a^n = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^m = 1$

نتيجة هذا السؤال هي خاصية بالدرس يمكن استعمالها دون برهان، لذلك فالهدف من السؤال هو تقديم برهان هذه الخاصية

نفس الشيء ينطبق على السؤال الثالث

ج) نفترض أن: $\log_{10}(2) \in Q$ إذن : $\exists \in (m,n) \in Z \times IN^* \;/\; 2^{\frac{m}{n}} = 10$ منه : $2^m = 10^n$ منه :

$2^m = 2^n \times 5^n$ منه : $5^n / 2^m$ و حيث أن : $5^n / 5^n$ فإن : $5^n / 2^m \wedge 5^n$

ولكون : $2 \wedge 5 = 1$ فحسب السؤال السابق نستنتج أن: $2^m \wedge 5^n = 1$ منه : $5^n / 1$ أي : $5^n = 1$

منه : $n = 0$ و هذا يناقض كون : $n \in IN^*$

بالتالي : $\log_{10}(2) \notin Q$

الهدف من هذا التمرين هو التمكن من استعمال القواعد الهامة التالية:

مبرهنة Bezout (لأنها أحينا تكون الوسيلة الوحيدة للبرهان)

$a \wedge (bc) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{cases}$ ، $a \wedge b = 1 \Rightarrow a^m \wedge b^m = 1$ ، $d = a \wedge b \Rightarrow \exists(\alpha,\beta) \in Z^2 \begin{cases} a = \alpha d \\ b = \beta d \end{cases} / \alpha \wedge \beta = 1$

مبرهنة كوص(Gauss): $\begin{cases} a / bc \\ a \wedge b \end{cases} \Rightarrow a / c$ ، $ac \wedge bc = c(a \wedge b)$

تمرين 3 :

لدينا : $\begin{cases} x = 7k \\ y = 5k \end{cases} / k \in Z \Leftrightarrow 5x = 7y \Leftrightarrow 10x = 14y$ بالتالي: $S = \{(7k;5k) / k \in Z\}$

$$3x-2y=1 \Leftrightarrow 3x-2y=3-2 \Leftrightarrow 3(x-1)=2(y-1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-1=2k \\ y-1=3k \end{cases} / k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=2k+1 \\ y=3k+1 \end{cases} / k\in Z$$

بالتالي: $S=\{(2k+1;3k+1)/k\in Z\}$

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد الحل الخاص: $(2;-3)$ منه:

$$17x+11y=1 \Leftrightarrow 17x+11y=2\times17-3\times11 \Leftrightarrow 17(x-2)=11(-y-3)$$

$$17x+11y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=11k \\ -y-3=17k \end{cases} / k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=11k+2 \\ y=-17k-3 \end{cases} / k\in Z$$

بالتالي: $S=\{(11k+2;-17k-3)/k\in Z\}$

باستعمال خوارزمية إقليدس نجد الحل الخاص للمعادلة $5x-3y=1$ هو $(2;3)$ منه الحل الخاص للمعادلة $5x-3y=7$ هو $(14;21)$ ، منه:

$$5x-3y=1 \Leftrightarrow 5x-3y=5\times14-3\times21 \Leftrightarrow 5(x-14)=3(y-21)$$

$$5x-3y=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x-14=3k \\ y-21=5k \end{cases} / k\in Z \Leftrightarrow \begin{cases} x=3k+14 \\ y=5k+21 \end{cases} / k\in Z$$

بالتالي: $S=\{(3k+14;5k+21)/k\in Z\}$

$$10x-2y=6 \Leftrightarrow 5x-y=3 \Leftrightarrow y=5x-3$$

بالتالي: $S=\{(k;5k-3)/k\in Z\}$

عندما يكون أحد المعاملات 1 أو -1 فنكتفي بكتابة أحد المجهولين بدلالة الآخر.

لدينا : $15x+6y=11 \Rightarrow 3(5x+2y)=11 \Rightarrow 3/11$ بالتالي : $S=\phi$

تمرين 4 : a و b عددان صحيحان طبيعيان غير منعدمان .

1 انظر السؤال 3 أ) من التمرين السابق

2 بوضع : $\begin{cases} d=x\wedge y \\ \Delta=x\vee y \end{cases}$ نستنتج أن : $\alpha\wedge\beta=1 / \begin{cases} x=\alpha d \\ y=\beta d \end{cases}$ $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2$ و أن $d\Delta=xy$

منه : $d\Delta=\alpha\beta d^2$ منه : $\Delta=\alpha\beta d$

منه : $(x+y)\wedge(x\vee y)=(d\alpha+d\beta)\wedge\alpha\beta d=d((\alpha+\beta)\wedge\alpha\beta)$

ولكون : $\alpha\wedge\beta=1$ و حسب السؤال السابق نستنتج أن : $(\alpha+\beta)\wedge\alpha\beta=1$

بالتالي : $(x+y)\wedge(x\vee y)=d=x\wedge y$

3 بوضع : $\begin{cases} d=x\wedge y \\ \Delta=x\vee y \end{cases}$ نستنتج أن : $\alpha\wedge\beta=1 / \begin{cases} x=\alpha d \\ y=\beta d \end{cases}$ $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2$ وباستعمال النتيجة السابقة

نستنتج أن : $\begin{cases} x+y=276 \\ x\vee y=1440 \\ x<y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=276\wedge1440 \\ d(\alpha+\beta)=276 \\ \alpha\beta d=1440 \\ \alpha<\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d=12 \\ \alpha+\beta=23 \\ \alpha\beta=120 \\ \alpha\wedge\beta=1 \\ \alpha<\beta \end{cases} \Rightarrow (\alpha,\beta)\in\{(8;15)\}$

منه : $(x,y)=(96;180)$ ، عكسيا نتحقق بسهولة من أن هذا الزوج يحقق النظمة المقترحة

خلاصة : $S=\{(96;180)\}$

سلسلة 2	الحسابيات	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : a و b و c أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة. (الأسئلة مستقلة)

1) بين أن : $(a \wedge b)+(a \vee b)=a+b \iff a/b \ ou \ b/a$

2) بين أن : $(a^2+ab+b^2)\wedge ab=1 \iff a\wedge b=1$

3) بين أن : $c/(a\wedge c)(b\wedge c) \iff c/ab$

4) بين أن : $(a^2-b^2)\wedge(a^3-b^3)=(a-b)$ (حيث $a>b$)

تمرين 2 : n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

1) بين أن : $15/ ab(a^2+b^2)(a^2-b^2) \quad \forall(a,b)\in IN^2$

2) بين أن : $42/n^7-n \quad \forall n\in IN$

3) بين أن : $9/4^n+6n+8 \quad \forall n\in IN$

4) بين أن : $6^n \equiv 1+5n[25] \quad \forall n\in IN$

تمرين 3 : a و b و c و d أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.

بين أن : $a^{4b+d}-a^{4c+d}\equiv 0[30]$

تمرين 4 : p عدد أولي أكبر من 2 و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.(السؤالان مستقلان)

1) بين أن : $(n+1)^p \equiv n^p+1\ [2p]$

2) بين أن : $n^{p^2}\equiv n^p\ [p^2]$

تمرين 5 : n عدد صحيح طبيعي أكبر من 1 .(السؤالان مستقلان)

1) بين أن العدد : $A_n=n^4+n^2+1$ غير أولي.

2) بين أن التفكيك الأولي للعدد A_n لا يحتوي على العدد 2

3) بين أن : $n\wedge 3=1 \Rightarrow 3/A_n$

تمرين 6 : a و b و x أعداد من IN^* حيث $x>1$ ، نضع : $a\wedge b=d$

1) بين أن : $(x^d-1)/(x^a-1)\wedge(x^b-1)$

2) نعتبر المعادلة : $(E) \quad ax+by=d$

أ) بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x_0,y_0) في Z^2

ب) حل في Z^2 المعدلة (E)

ج) استنتج أن : $\exists(u,v)\in IN^2 \ / \ au-bv=d$

د) تحقق أن : $(x^{au}-1)-(x^{bv}-1)x^d=(x^d-1)$

3) استنتج مما سبق أن : $(x^a-1)\wedge(x^b-1)=(x^{a\wedge b}-1)$

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	الحسابيات حلول مقترحة	سلسلة 2

تمرين 1 : a و b و c أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة. (الأسئلة مستقلة)

1

نضع: $d = a\wedge b$ منه : $\exists(\alpha,\beta)\in IN^2 \ / \begin{cases} a = d\alpha \\ b = d\beta \\ \alpha\wedge\beta = 1\end{cases}$

و حيث أن : $(a\wedge b).(a\vee b) = ab$ فإن : $d.(a\vee b) = d^2\alpha\beta$ منه: $a\vee b = d\alpha\beta$ ، الآن ، لدينا :

$$(a\wedge b)+(a\vee b) = a+b \iff d + d\alpha\beta = d\alpha + d\beta \iff 1+\alpha\beta = \alpha+\beta \iff 1-\alpha+\beta(\alpha-1) = 0$$

$$(a\wedge b)+(a\vee b) = a+b \iff (\alpha-1)(\beta-1) = 0 \iff (\alpha=1)\ ou\ (\beta=1) \iff (a/b)\ \ ou\ \ (b/a)$$

2

- نفرض أن : $(a^2+ab+b^2)\wedge ab = 1$ ، نضع : $a\wedge b = d$ منه:

$$\begin{cases} d/a \\ d/b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/ab \\ d/b^2 \\ d/a^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/ab \\ d/a^2+ab+b^2\end{cases} \Rightarrow d/(a^2+ab+b^2)\wedge(ab) \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

- نفرض الآن أن : $a\wedge b = 1$ ، إذن : $a\wedge b^2 = 1$ و $a^2\wedge b = 1$

نضع : $(a^2+ab+b^2)\wedge a = d$ ، منه :

$$\begin{cases} d/a \\ d/a^2+ab+b^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a \\ d/a(a+b) \\ d/a^2+ab+b^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a \\ d/b^2\end{cases} \Rightarrow d/a\wedge b^2 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$$

و بنفس الطريقة نبين أن : $(a^2+ab+b^2)\wedge b = 1$

الآن : $\begin{cases}(a^2+ab+b^2)\wedge a = 1 \\ (a^2+ab+b^2)\wedge b = 1\end{cases} \Rightarrow (a^2+ab+b^2)\wedge ab = 1$

خلاصة : $(a^2+ab+b^2)\wedge ab = 1 \iff a\wedge b = 1$

للتذكير: $x^n\wedge y^m = 1 \iff x\wedge y = 1$ و $x\wedge yz = 1 \iff \begin{cases} x\wedge y = 1 \\ x\wedge z = 1\end{cases}$

هناك طرق أخرى لحل هذا التمرين (على الأقل أعرف طريقتين) ،لكننا فضلنا إدراج الطريقة التي يمكن تعميمها على أسئلة مشابهة.

3

- بداية نعلم أن : $(a\wedge c)/a$ و $(b\wedge c)/b$ منه : $(a\wedge c)(b\wedge c)/ab$ ، إذن : $c/ab \ \Rightarrow\ c/(a\wedge c)(b\wedge c)$

- من جهة أخرى ، نضع: $d = a\wedge c$ منه : $\exists(\alpha,\lambda)\in IN^2 \ / \begin{cases} a = d\alpha \\ c = d\lambda \\ \alpha\wedge\lambda = 1\end{cases}$

بين أن :

$$c/ab \Rightarrow d\lambda/d\alpha b \Rightarrow \begin{cases}\lambda/\alpha b \\ \alpha\wedge\lambda = 1\end{cases} \Rightarrow \lambda/b \Rightarrow \lambda d/bd \Rightarrow c/b(a\wedge c)$$

مرة أخرى نضع : $\delta = b\wedge c$ منه : $\exists(p,q)\in IN^2 \ / \begin{cases} b = \delta p \\ c = \delta q \\ p\wedge q = 1\end{cases}$ منه :

$$c/b(a\wedge c) \Rightarrow \delta q/\delta p\,(a\wedge c) \Rightarrow \begin{cases} q/p\,(a\wedge c) \\ p\wedge q = 1\end{cases} \Rightarrow q/(a\wedge c) \Rightarrow \delta q/\delta(a\wedge c) \Rightarrow c/(b\wedge c)(a\wedge c)$$

4	نفرض أن : $a \wedge b = 1$ ، إذن : $a^2 \wedge b^2 = 1$ ، لدينا إذن: $(a^2-b^2)\wedge(a^3-b^3) = (a-b)(a+b)\wedge(a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)\left((a+b)\wedge(a^2+ab+b^2)\right)$ نضع : $(a+b)\wedge(a^2+ab+b^2) = d$ ، إذن : $\begin{cases} d/a+b \\ d/a^2+ab+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^2+ab \\ d/ab+b^2 \\ d/a^2+ab+b^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d/a^2 \\ d/b^2 \end{cases} \Rightarrow d/a^2\wedge b^2 \Rightarrow d/1 \Rightarrow d=1$ بالتالي: $(a^2-b^2)\wedge(a^3-b^3) = a-b$
	تمرين 2 : n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.
1	لدينا : $A = ab(a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^3b-ab^3)(a^2+b^2)$ لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases} a^3 \equiv a[3] \\ b^3 \equiv b[3] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} ba^3 \equiv ab[3] \\ ab^3 \equiv ab[3] \end{cases}$ منه : $ba^3-ab^3 \equiv 0[3]$ منه : $A \equiv 0[3]$ لدينا من جهة أخرى : $A = ab(a^4-b^4) = a^5b-ab^5$ لدينا حسب مبرهنة فيرما : $\begin{cases} a^5 \equiv a[5] \\ b^5 \equiv b[5] \end{cases}$ منه : $\begin{cases} ba^5 \equiv ab[5] \\ ab^5 \equiv ab[5] \end{cases}$ منه : $ba^5-ab^5 \equiv 0[5]$ منه : $A \equiv 0[5]$ إذن : $3/A$ و $5/A$ ، وبما أن : $3\wedge 5 = 1$ فإن: $15/A$ ، بالتالي : $15/\ ab(a^2+b^2)(a^2-b^2)$
2	لدينا حسب مبرهنة فيرما : $n^7 \equiv n[7]$ و $n^3 \equiv n[3]$ منه: $n^6 \equiv n^2[3]$ منه : $\begin{cases} n^7 \equiv n^3[3] \\ n^3 \equiv n[3] \end{cases}$ منه : $n^7 \equiv n[3]$ و $n^2 \equiv n[2]$ منه: $n^6 \equiv n^3[2]$ منه : $n^7 \equiv n^4 \equiv n^2 \equiv n[2]$ بما أن 2 و 3 و 7 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن: $42/n^7-n \quad \forall n \in IN$
	بالنسبة للعدد 2 يمكن دراسة حالات الزوجية فقط دون الحاجة لمبرهنة فيرما.
3	لدينا : $4^n+6n+8 = 4^n-1+6n+9 = 3(4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1)+6n+9 = 3(4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1+2n+3)$ الآن لدينا : $\begin{array}{l} 1 \equiv 1[3] \\ 4 \equiv 1[3] \\ 4^2 \equiv 1[3] \\ \ldots \equiv ..[3] \\ 4^{n-1} \equiv 1[3] \\ 4^n \equiv 1[3] \end{array}$ منه : $4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1 \equiv n[3]$ منه : $4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1+2n+3 \equiv 3n+3 \equiv 0[3]$ ، إذن : $4^{n-1}+4^{n-2}+\ldots+4+1+2n+3 \equiv 3k / k \in IN$ منه : $4^n+6n+8 = 9k$ ، بالتالي : بين أن: $9/4^n+6n+8$
4	لدينا : $6^n-1-5n = 5(6^{n-1}+6^{n-2}+\ldots+6+1-n)$ وبنفس طريقة السؤال السابق نبين أن : $(6^{n-1}+6^{n-2}+\ldots+6+1)-n \equiv n-n \equiv 0[5]$ منه : $(6^{n-1}+6^{n-2}+\ldots+6+1)-n = 5k \quad / k \in IN$ بالتالي : بين أن : $6^n \equiv 1+5n[25]$
	تمرين 3 : a و b و c و d أعداد صحيحة طبيعية غير منعدمة.
	▪ إذا كان a زوجي فإن : a^{4b+d} و a^{4c+d} زوجيان ، وإذا كان a فردي فإن : a^{4b+d} و a^{4c+d} فرديان في كلا الحالتين $a^{4b+d}-a^{4c+d}$ زوجي، منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d} \equiv 0[2]$ ▪ إذا كان $a \equiv 0[3]$ فإن : $a^{4b+d} \equiv 0[3]$ و $a^{4c+d} \equiv 0[3]$ منه : $a^{4b+d}-a^{4c+d} \equiv 0[3]$

	في الحالة الآخرى نستنتج أن : $3 \wedge a = 1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^2 \equiv 1[3]$ منه : $a^{4b} \equiv 1[3]$ و $a^{4c} \equiv 1[3]$ منه : $a^{4b} \equiv a^{4c}\ [3]$ منه : $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[3]$ ، في كل الحلات نجد أن: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[3]$ ▪ إذا كان $a \equiv 0[5]$ فإن : $a^{4b+d} \equiv 0[5]$ و $a^{4c+d} \equiv 0[5]$ منه : $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[5]$ في الحالة الآخرى نستنتج أن : $5 \wedge a = 1$ إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $a^4 \equiv 1[5]$ منه : $a^{4b} \equiv 1[5]$ و $a^{4c} \equiv 1[5]$ منه : $a^{4b} \equiv a^{4c}\ [5]$ منه : $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[5]$ ، في كل الحلات نجد أن: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[5]$ بما أن 2 و 3 و 5 أعداد أولية فيما بينها مثنى مثنى فإن: $a^{4b+d} - a^{4c+d} \equiv 0[30]$
	تمرين 4 : p عدد أولي أكبر من 2 و n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.(السؤالان مستقلان)
1	بدراسة زوجية العدد n نستنتج بسهولة أن : $(n+1)^p \equiv n^p + 1\ [2]$ من جهة أخرى و حسب مبرهنة فيرما $\begin{cases}(n+1)^p \equiv n+1\ [p] \\ n^p \equiv n\ [p]\end{cases}$ منه : $(n+1)^p - n^p \equiv 1\ [p]$ أي : $(n+1)^p \equiv n^p + 1\ [p]$ وبما أن p عدد أولي أكبر من 2 فإن : $p \wedge 2 = 1$ بالتالي : $(n+1)^p \equiv n^p + 1\ [2p]$
2	لدينا $p > 2$ منه : $p^2 - p > 0$ ، منه : $n^{p^2} - n^p = n^p\left(n^{p^2-p} - 1\right)$ ▪ إذا كان : $n \equiv 0[p]$ فإن : $n^2 \equiv 0\left[p^2\right]$ منه : $n^{p^2} - n^p = n^2\, n^{p-2}\left(n^{p^2-p} - 1\right) \equiv 0\left[p^2\right]$ ▪ في الحالة الأخرى يكون لدينا : $n \wedge p = 1$ ، إذن حسب مبرهنة فيرما نجد: $n^p \equiv 1[p]$ منه : $n^{p^2-p} - 1 = \left(n^p\right)^{p-1} - 1 = \left(n^p - 1\right)\left[\left(n^p\right)^{p-2} + \left(n^p\right)^{p-3} + ... + n^p + 1\right]$ من $n^p \equiv 1[p]$ نستنتج أن : $\left(n^p\right)^{p-2} + \left(n^p\right)^{p-3} + ... + n^p + 1 \equiv p \equiv 0[\,p\,]$ إذن : $n^p - 1 = p\alpha \,/\, \alpha \in IN$ و $\left(n^p\right)^{p-2} + \left(n^p\right)^{p-3} + ... + n^p + 1 \equiv \beta\, p \,/\, \beta \in IN$ منه: $n^{p^2} - n^p = n^p \alpha\beta\ p^2$ ، منه : بين أن : $n^{p^2} \equiv n^p\left[p^2\right]$ في جميع الحالات نستنتج أن : $n^{p^2} \equiv n^p\left[p^2\right]$
	تمرين 5 : n عدد صحيح طبيعي أكبر من 1 .
1	لدينا : $A_n = n^4 + n^2 + 1 = n^4 + 2n^2 + 1 - n^2 = \left(n^2+1\right)^2 - n^2 = \left(n^2+n+1\right)\left(n^2-n+1\right)$ وبما أن: $n^2+n+1 > 1$ و $n^2+n+1 = n(n-1)+1 > 1$ ، إذن A_n غير أولي.
2	بدراسة زوجية العدد n نستنتج أن $n^4 + n^2$ زوجي ، إذن A_n عدد فردي ما يعني أن التفكيك الأولي للعدد A_n لا يحتوي على العدد 2
3	بين أن : $n \wedge 3 = 1 \ \Rightarrow\ 3 / A_n$ لدينا حسب مبرهنة فيرما : $n \wedge 3 = 1 \ \Rightarrow\ n^2 \equiv 1[3] \ \Rightarrow\ n^4 \equiv 1[3] \Rightarrow n^4 + n^2 + 1 \equiv 3 \equiv 0[\,3\,] \ \Rightarrow\ 3 / A_n$
	تمرين 6 : a و b و x أعداد من IN^* حيث $x > 1$ ، نضع : $a \wedge b = d$
1	لدينا : $a \wedge b = d$ $\quad \exists(\alpha, \beta) \in IN^2 \ / \begin{cases} a = d\,\alpha \\ b = d\,\beta \\ \alpha \wedge \beta = 1\end{cases}$

ولدينا : $x^d \equiv 1\left[x^d-1\right]$ ، منه : $\begin{cases} x^{\alpha d}\equiv 1\left[x^d-1\right] \\ x^{\beta d}\equiv 1\left[x^d-1\right]\end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^{\alpha d}-1\equiv 0\left[x^d-1\right]\\ x^{\beta d}-1\equiv 0\left[x^d-1\right]\end{cases}$ منه : $\begin{cases} x^d-1/x^{\alpha d}-1\\ x^d-1/x^{\beta d}-1\end{cases}$

إذن : $(x^d-1)/(x^a-1)\wedge(x^b-1)$

2

$(E)\quad a\,x+by=d$

أ) لدينا : $\alpha\wedge\beta=1$ إذن حسب مبرهنة Bezout فإن: $\exists(x_0,y_0)\in Z^2\ /\ \alpha\,x_0+\beta\,y_0=1$

منه : $\alpha d\,x_0+\beta d\,y_0=d$ أي : $a\,x_0+b\,y_0=d$

ما يعني أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا (x_0,y_0) في Z^2

ب) $(E)\Leftrightarrow\ \alpha\,x+\beta\,y=1\Leftrightarrow\alpha\,x+\beta\,y=\alpha\,x_0+\beta\,y_0\ \Leftrightarrow\alpha\,(x-x_0)=\beta\,(y_0-y)$

$(E)\Leftrightarrow\begin{cases}x-x_0=\beta\,k\\ y_0-y=\alpha\,k\end{cases}/k\in Z\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=\beta\,k+x_0\\ y=y_0-\alpha\,k\end{cases}/k\in Z$

بالتالي : $S=\{(\beta\,k+x_0\ ,y_0-\alpha\,k)/\ k\in Z\}$

ج) لنبحث عن إمكانية إيجاد زوج (x,y) من مجموعة الحلول السابقة حيث يكون : $\begin{cases}x\geq 0\\ y\leq 0\end{cases}$

لدينا : $\begin{cases}x\geq 0\\ y\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta\,k+x_0\geq 0\\ y_0-\alpha\,k\leq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k\geq\dfrac{-x_0}{\beta}\\ k\geq\dfrac{y_0}{\alpha}\end{cases}$

إذن يكفي أن نأخذ : $k=k_0=Max\left(E\left(\dfrac{-x_0}{\beta}\right);E\left(\dfrac{y_0}{\alpha}\right)\right)+1$

مما يعني صحة العبارة : $\exists(u,v)\in IN^2\ /\quad au-bv=d$ حيث : $u=\beta\,k_0+x_0$ و $v=-(y_0-\alpha\,k_0)=\alpha\,k_0-y_0$

د) لدينا: $(x^{au}-1)-(x^{bv}-1)x^d=x^{au}-1-x^{bv+d}+x^d=x^{au}-1-x^{au}+x^d=x^d-1$

3

لدينا من جهة حسب السؤال الأول : $(x^d-1)/(x^a-1)\wedge(x^b-1)\quad(1)$

و من جهة أخرى : $\begin{cases}x^a\equiv 1\left[x^a-1\right]\\ x^b\equiv 1\left[x^b-1\right]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x^{au}\equiv 1\left[x^a-1\right]\\ x^{bv}\equiv 1\left[x^b-1\right]\end{cases}$ منه : $\begin{cases}x^a-1/x^{au}-1\\ x^b-1/x^{bv}-1\end{cases}$

وحيث أن : $(x^d-1)/(x^a-1)\wedge(x^b-1)$ فإن : $\begin{cases}(x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^a-1\\ (x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^b-1\end{cases}$ منه : $\begin{cases}(x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^{au}-1\\ (x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^{bv}-1\end{cases}$

منه : $(x^a-1)\wedge(x^b-1)/(x^{au}-1)-(x^{bv}-1)x^d$ أي : $(x^a-1)\wedge(x^b-1)/x^d-1\quad(2)$

من (1) و (2) نستنتج أن : $(x^a-1)\wedge(x^b-1)=(x^{a\wedge b}-1)$

-1 $\log(x+2)+\log(x+3)=\log 6$

-2 $\log|x+2|+\log\log_{\frac{2}{3}}|x+5|=\log 6$

-3 $\log^2 x-7\log x+6=0$

تمرين11

حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات :

-1 $\log(x-1)\leq 0$

-2 $\log(x-1)-\log(2x-4)>0$

الحسابيات

تمرين 1

أ - بين أن : 13 تقسم $7\times3^{3n+4}+5\equiv 0[13]$

ب - حدد k بحيث : 13 تقسم $5\times3^{49}+k$

الحل

أ -

$$\begin{cases}3^3\equiv1[13]\\3^4\equiv3[13]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3^{3n}\equiv1[13]\\3^4\equiv3[13]\end{cases}\Rightarrow3^{3n+4}\equiv3[13]$$

$$3^{3n+4}\equiv3[13]\Rightarrow7\times3^{3n+4}\equiv8[13]\Rightarrow7\times3^{3n+4}+5\equiv0[13]$$

ب -

$$\begin{cases}3^{45}\equiv1[13]\\3^4\equiv3[13]\end{cases}\Rightarrow3^{49}\equiv3[13]$$

$$3^{45}\equiv3[13]\Rightarrow5\times3^{45}+k\equiv2+k[13]$$

13 تقسم $5\times3^{49}+k$ يعني : $2+k\equiv0[13]$

$$2+k\equiv0[13]\Leftrightarrow k\equiv11[13]$$

$$k\in13\mathbb{Z}+\{11\}$$

تمرين 2

$b\geq2;a\geq2$

q خارج القسمة الإقليدية ل : b على a

حدد باقي و خارج القسمة الإقليدية ل : $(b+1)a^{99}-1$ على a^{100}

الحل

$$b=aq+r\ ;\ 0\leq r\leq a-1$$

$$ba^{99}+a^{99}-1=a^{100}q+a^{99}+ra^{99}-1\,;\,0\leq ra^{99}+a^{99}\leq a^{100}$$

$$(b+1)a^{99}-1=a^{100}q+\left(a^{99}(r+1)-1\right);0\leq\left(a^{99}(r+1)-1\right)\leq a^{100}-1$$

تمرين3

أ- حدد باقي القسمة الإقليدية ل : 6^{532} على 11

ب - $a=3\times6^{4592}+4\times6^{75}+6$

بين أن : 11 تقسم a

الحل

أ-

$$\begin{cases}(Ferma)\ 6^{10}\equiv1[11]\\6^2\equiv3[11]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6^{530}\equiv1[11]\\6^2\equiv3[11]\end{cases}\Rightarrow6^{532}\equiv3[11]$$

ب -

$$\begin{cases}6^{4590}\equiv1[11]\\6^2\equiv3[7]\end{cases}\Rightarrow6^{4592}\equiv3[11]\Rightarrow3\times6^{4592}\equiv9[11]$$

$$\begin{cases}6^{70}\equiv1[11]\\6^5\equiv10[7]\end{cases}\Rightarrow6^{75}\equiv10[11]\Rightarrow4\times6^{4592}\equiv7[11]$$

$$3\times6^{4592}+4\times6^{75}+6\equiv16[11]$$

$$6\equiv6[11]$$

$$a\equiv22[11]\Rightarrow a\equiv0[11]$$

تمرين4

$n\in\mathbb{Z}$ و $p\in IP-\{2\}$

أ- بين أن : $n^p\equiv n[2]$

ب- استنتج أن : $(n+1)^p-(n^p+1)\equiv0[2p]$

الحل

أ- $n^p-n=n\left(n^{p-1}-1\right)=n(n-1)\left(n^{p-2}+\cdots+n+1\right)$

$n(n-1)$ زوجي إذن : n^p-n زوجي

و منه : $n^p\equiv n[p]$

ب- حسب فيرما

$$\begin{cases}(n+1)^p\equiv n+1[p]\\n^p\equiv n[p]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(n+1)^p\equiv n+1[p]\\n^p+1\equiv n+1[p]\end{cases}\Rightarrow(n+1)^p-(n^p+1)\equiv0[p]$$

و من أ-

$$\begin{cases}(n+1)^p\equiv n+1[2]\\n^p\equiv n[2]\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(n+1)^p\equiv n+1[2]\\n^p+1\equiv n+1[2]\end{cases}\Rightarrow(n+1)^p-(n^p+1)\equiv0[2]$$

إذن :

$$\begin{cases}(n+1)^p-(n^p+1)\equiv0[p]\\(n+1)^p-(n^p+1)\equiv0[2]\end{cases}\Rightarrow(n+1)^p-(n^p+1)\equiv0[2p]$$

تمرين5

$(a;n;m;k)\in\mathbb{N}^*$

$p\in IP$

بين أن :

أ - $a^{n(p-1)+m}-a^{k(p-1)+m}\equiv0[p]$

ب ـ استنتج أن :

$a^{12n+m}-a^{12k+m}\equiv0[70]$

الحل

أ ـ إذا كان : p يقسم a

فإن : $a^{n(p-1)+m}-a^{k(p-1)+m}\equiv0[p]$

- إذا كان : p يقسم a

فإن : $Ferma ; a^{p-1} \equiv 1[p] \Rightarrow \begin{cases} a^{n(p-1)+m} \equiv a^m [p] \\ a^{k(p-1)+m} \equiv a^m [p] \end{cases}$

إذن : $a^{n(p-1)+m} - a^{k(p-1)+m} \equiv 0[p]$

ب ـ من أ :

$$(1)\ a^{6\times 2n+m} - a^{6\times 2k+m} \equiv 0[7] \Rightarrow a^{12n+m} - a^{12k+m} \equiv 0[7]$$

$$(2)\ a^{4\times 3n+m} - a^{4\times 3k+m} \equiv 0[5] \Rightarrow a^{12n+m} - a^{12k+m} \equiv 0[5]$$

$$(3)\ a^{1\times 12n+m} - a^{1\times 12k+m} \equiv 0[2] \Rightarrow a^{12n+m} - a^{12k+m} \equiv 0[2]$$

من : $(3);(2);(1)$

$$7 / a^{12n+m} - a^{12k+m} ; 5 / a^{12n+m} - a^{12k+m} ; 2 / a^{12n+m} - a^{12k+m}$$

إذن : $7 \vee 5 \vee 2 / a^{12n+m} - a^{12k+m}$

و منه : $70 / a^{12n+m} - a^{12k+m}$

إذن : $a^{12n+m} - a^{12k+m} \equiv 0[70]$

تمرين6

$(a;b) \in \mathbb{Z}^2$ و $p \in IP$

أ- بين أن : $a \equiv b[p] \Leftrightarrow a^p \equiv b^p [p]$

ب- بين أن : $a^p \equiv b^p [p] \Rightarrow a^p \equiv b^p \left[p^2\right]$

الحل

أ- $(\Rightarrow)$ بما أن : الموافقة منسجمة مع الضرب

فإن : $a \equiv b[p] \Rightarrow a^p \equiv b^p [p]$

$(\Leftarrow)$

$$\begin{cases} Ferma \begin{cases} a^p \equiv a[p] \\ b^p \equiv b[p] \end{cases} \Rightarrow a \equiv b[p] \\ \quad a^p \equiv b^p [p] \end{cases}$$

ب ـ من أ :

$$a^n \equiv b^n [p] \Rightarrow a \equiv b[p] \Rightarrow a = pq + b$$

$$a^p = (pq+b)^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i (pq)^i b^{p-i}$$

$$a^p = b^p + C_p^1 pq \times b^{p-1} + \sum_{i=2}^{p} C_p^i (pq)^i b^{p-i}$$

$$C_p^1 = p$$

إذن : $a^p = b^p + p^2 q \times b^{p-1} + \sum_{i=2}^{p} C_p^i (pq)^i b^{p-i}$

$$a^p - b^p = p^2 q \times b^{p-1} + \sum_{i=2}^{p} C_p^i (pq)^i b^{p-i}$$

لدينا : $p^2 / \sum_{i=2}^{p} C_p^i (pq)^i b^{p-i}$

إذن : $p^2 / \left(a^p - b^p\right)$

و منه : $a^p \equiv b^p [p] \Rightarrow a^p \equiv b^p \left[p^2\right]$

تمرين 7

$$a = n(n+1)(n+5)$$

بين أن : $a \equiv 0[6]$

الحل

$n \equiv$	0	1	2	3	4	5
$n+1 \equiv$	1	2	3	4	5	0
$n+5 \equiv$	5	0	1	2	3	4
$a \equiv$	0	0	0	0	0	0

تمرين 8

$n \in \mathbb{N}$

بين أن : $7(n(n+1))^2 \equiv 0[28]$

الحل

$$2 / n(n+1) \equiv 0[2] \Rightarrow 4 / (n(n+1))^2$$

إذن : $4 / 7(n(n+1))^2$

ولدينا : $7 / 7(n(n+1))^2$

إذن : $4 \vee 7 / 7(n(n+1))^2$

و منه : $28 / 7(n(n+1))^2$

تمرين9

بين أن : $n^2(n^2-1) \equiv 0[12]$

الحل

$$n^2(n^2-1) = n(n-1)(n+1) \equiv 0[12]$$

تمرين10

$n \in \mathbb{N}$

حدد n بحيث : 7 تقسم n^2+3n-3

الحل

$$n^2+3n-3 \equiv 0[7] \Rightarrow n^2+3n-3-7n+7 \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow n^2-4n+4 \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow (n-2)^2 \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow n-2 \equiv 0[7]$$

$$\Rightarrow n \equiv 5[7]$$

إذن : $n \in 7\mathbb{N} + \{5\}$

تمرين11

$n \in \mathbb{N}$

بين أن : $(n+1)^n \equiv 1\left[n^2\right]$

الحل

$$(n+1)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k n^k\ ;\ C_n^1=n$$

$$(n+1)^n=C_n^0n^0+C_n^1n^1+\sum_{k=2}^{n}C_n^k n^k$$

$$(n+1)^n=1+n^2+\sum_{k=2}^{n}C_n^k n^k$$

$$(n+1)^n=1+n^2\left(1+\sum_{k=2}^{n}C_n^k n^{k-2}\right)$$

إذن : $(n+1)^n\equiv 1\left[n^2\right]$

تمرين 12

$n\in\mathbb{Z}\ \ ;\ \ (a;b;d)\in\mathbb{Z}^{*3}$

$a=nb+d$

بين أن : $a\wedge b=b\wedge d$

الحل

$b\wedge d\,/\,b\ ;\ b\wedge d\,/\,d\Rightarrow b\wedge d\,/\,b\ ;\ b\wedge d\,/\,nb+d$

$\Rightarrow b\wedge d\,/\,b\ ;\ b\wedge d\,/\,a$

$\Rightarrow b\wedge d\,/\,a\wedge b$

$a\wedge b\,/\,b\ ;\ a\wedge b\,/\,a\Rightarrow a\wedge b\,/\,b\ ;\ a\wedge b\,/\,nb+d$

$\Rightarrow a\wedge b\,/\,b\ ;\ a\wedge b\,/\,d$

$\Rightarrow a\wedge b\,/\,b\wedge d$

تمرين13

حل في $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$

$(E)\quad 2x^2-3x+4=1$

الحل

x	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\overline{5}$
$\overline{2}x^2$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$
$-\overline{3}x$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$	$\overline{0}$	$\overline{3}$
$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$	$\overline{4}$
(E)	$\overline{4}$	$\overline{3}$	$\overline{2}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$

$S=\left\{\overline{3}\right\}$

تمرين14

حل في $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$

$$(S)\quad\begin{cases}\overline{5}x+\overline{4}y=\overline{1}\\ \overline{6}x+\overline{3}y=\overline{2}\end{cases}$$

الحل

$$(S)\Rightarrow\begin{cases}\overline{5}x+\overline{4}y+\overline{6}x+\overline{3}y=\overline{1}+\overline{2}\\ \overline{6}x+\overline{3}y=\overline{2}\end{cases}$$

$$(S)\Rightarrow\begin{cases}\overline{4}x=\overline{3}\\ \overline{6}x+\overline{3}y=\overline{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overline{4}x=\overline{24}\\ \overline{6}x+\overline{3}y=\overline{2}\end{cases}$$

$$(S)\Rightarrow\begin{cases}x=\overline{6}\\ \overline{6}x+\overline{3}y=\overline{2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\overline{6}\\ \overline{3}y=\overline{1}\end{cases}$$

$$(S)\Rightarrow\begin{cases}x=\overline{6}\\ \overline{3}y=\overline{15}\end{cases}$$

$$(S)\Rightarrow\begin{cases}x=\overline{6}\\ y=\overline{5}\end{cases}$$

$$S=\left\{\left(\overline{6};\overline{5}\right)\right\}$$

تمرين15

1 - بين أن 131 أولي

2- حل في $\mathbb{Z}/133\mathbb{Z}$

$(E)\quad \overline{132}x^2+\overline{129}x-\overline{139}=0$

الحل

1 - الأعداد الأولية الأصغر من : $\sqrt{133}$ لا تقسم 133

إذن : 133 أولي

2- في : $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$: $\left(\overline{3}\neq\overline{0}\,;\overline{4}\neq\overline{0}\,mais\ \ \overline{3}\times\overline{4}=\overline{0}\right)$

$(E)\Rightarrow\overline{132}x^2+\overline{129}x-\overline{139}=0$

$\Rightarrow x^2-\overline{2}x-\overline{8}=0$

$\Rightarrow x^2-\overline{2}x+\overline{1}-\overline{9}=0$

$\Rightarrow\left(x-\overline{4}\right)\left(x+\overline{2}\right)=0;\mathbb{Z}/131\mathbb{Z}\,corps$

$\Rightarrow\left(x-\overline{4}\right)=0\ \ ou\ \ \left(x+\overline{2}\right)=0$

$\Rightarrow x=\overline{4}\ \ ou\ \ x=\overline{-2}=\overline{129}$

$\boxed{S=\left\{\overline{129};\overline{5}\right\}}$

تمرين16

حل في $\mathbb{Z}^2$

أ- $8x=9y$

ب- $8x+6y=12$

الحل

أ- $Gauss\begin{cases}8/9y\\ 8\wedge 9=1\end{cases}\Rightarrow 8/y\Rightarrow\exists k\in\mathbb{Z};y=8k$

إذن : $8x=9\times 8k\Rightarrow x=9k$

$S=\left\{(9k;8k)\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

ب- $8\wedge 6=2$

$8x+6y=12\Leftrightarrow 4x+3y=6$

$(3;-2)$ حل خاص ل $4x+3y=6$

(نستعمل مضاعفات 4 و 3 لتحديد الحل الخاص)

الحل الخاص موجود لأن : $4\wedge 3=1 \Leftrightarrow 4u+3v=1$

$\Leftrightarrow 4\times 6u+3\times 6v=6$

(يمكن كذلك استعمال خوارزمية إقليدس لتحديد الحل الخاص)

$$4x+3y=6 \Rightarrow \begin{cases} 4x+3y=6 \\ 4\times 3+3\times(-2)=6 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4(x-3)+3(y+2)=0$$

$$\Rightarrow 4(x-3)=-3(y+2)$$

$$\Rightarrow 3/4(x-3)\ ;\ 4\wedge 3=1$$

$$\Rightarrow 3/(x-3)$$

$$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z} /\ x=3k+3$$

إذن : $-3(y+2)=4\times 3k \Rightarrow y=-4k-2$

$$S=\{(3k+3;-4k-2)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}$$

تمرين17

أ- حل في $\mathbb{Z}^2$: $(E)\quad 13x-38y=2$

ب- ما هي القيم الممكنة ل : $x\wedge y$

ج- حدد S' حلول (E) في حالة : $x\wedge y\neq 1$

د- حدد S'' حلول (E) في حالة : $x\wedge y=1$

الحل

أ –

$$(E)\Rightarrow 13x=38y+2$$

$$\Rightarrow 13x=2(19y+1)$$

$$\Rightarrow 2/13x\ ;\ 2\wedge 13=1$$

$$\Rightarrow 2/x$$

$$\Rightarrow \exists x'\in\mathbb{Z}\ ;\ x=2x'$$

$$(E)\Rightarrow 13\times 2x'-38y=2$$

$$\Rightarrow 13x'-19y=1$$

$(3;2)$ حل خاص ل $13x'-19y=1$

$$13x'-19y=1 \Rightarrow 13(x'-3)-19(y-2)=0$$

$$\Rightarrow 13(x'-3)=19(y-2)$$

$$\Rightarrow 19/(x'-3)$$

$$\Rightarrow \exists k\in\mathbb{Z} /\ x'=19k+3$$

$$x'=19k+3 \Rightarrow 13\times 19k=19(y-2)$$

$$\Rightarrow \boxed{y=13k+2}$$

$$x'=19k+3\ ;\ x=2x' \Rightarrow \boxed{x=38k+6}$$

$$\boxed{S=\{(38k+6;13k+2)\ /\ k\in\mathbb{Z}\}}$$

ب- $x\wedge y\ /x\ et\ x\wedge y\ /y \Rightarrow x\wedge y\ /(13x-38y)$

$$\Rightarrow x\wedge y\ /2$$

إذن : $x\wedge y=1$ أو $x\wedge y=2$

ج- حلول (E) في حالة : $x\wedge y\neq 1$

$$x\wedge y\neq 1 \Rightarrow x\wedge y=2$$

$$\Rightarrow 2/13k+2$$

$$\Rightarrow 2/13k\ ;\ 2\wedge 13=1$$

$$\Rightarrow 2/k$$

$$\boxed{S'=\{(38k+6;13k+2)\ /\ k\in 2\mathbb{Z}\}}$$

د- حلول (E) في حالة : $x\wedge y=1$

$$\boxed{S''=\{(38k+6;13k+2)\ /\ k\in 2\mathbb{Z}+\{1\}\}}$$

تمرين 18

$(a;b;c)\in\mathbb{Z}^{*3}$

بين أن : $a\wedge b=1 \Rightarrow a\wedge(bc)=a\wedge c$

الحل

$$a\wedge c\ /a\ ;a\wedge c\ /c \Rightarrow a\wedge c\ /a\ ;a\wedge c\ /bc$$

$$\Rightarrow a\wedge c\ /a\wedge(bc)$$

$$a\wedge b=1 \Rightarrow \exists(u;v)\in\mathbb{Z}\ ;\ au+bv=1$$

$$\Rightarrow \exists(u;v)\in\mathbb{Z}\ ;\ acu+bcv=c$$

$$a\wedge(bc)/a\ ;a\wedge(bc)/bc \Rightarrow a\wedge(bc)/a\ ;\ a\wedge(bc)/acu+bcv$$

$$\Rightarrow a\wedge(bc)/a\ ;a\wedge(bc)/c$$

$$\Rightarrow a\wedge(bc)/a\wedge c$$

إذن : $a\wedge b=1 \Rightarrow a\wedge(bc)=a\wedge c$

تمرين19

بين أن : $a\in\mathbb{N}^*-\{1\}\ ;\ n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$

$$a^n+1\ premier \Rightarrow a\ paire$$

الحل

الإستلزام المضاد للعكس

$$a\ impaire \Rightarrow a^n+1\ non\ premier$$

$$a\ impaire \Rightarrow a^n\ impaire$$

$$\Rightarrow a^n+1\ paire$$

$$\Rightarrow a^n+1\ non\ premier$$

تمرين20

$\overline{12551}_{(10)}$ يكتب في الأساس (b) على شكل : $\overline{30407}_{(b)}$

حدد : b

الحل

العدد 7 يوجد في $\overline{30407}_{(b)}$

إذن : $b>7$

$$\overline{30407}_{(b)}=3b^4+4b^2+7=12551$$

$$3b^4+4b^2-12544=0$$

$$\Delta=388^2$$

$$b^2=64\ ou\ b^2=\frac{-196}{3}$$

إذن : $\boxed{b=8}$

تمرين21

$\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(9)}$

حدد : $x ; y ; z$

الحل

الأعداد $x ; y ; z$ أصغر قطعا من 7

$$\overline{xyz}_{(7)} = \overline{zyx}_{(9)} \Leftrightarrow x\times 7^2 + y\times 7 + z = z\times 9^2 + y\times 9 + x$$

$$\Leftrightarrow 48x - 2y - 80z = 0$$

$$\Leftrightarrow 24x - y - 40z = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 8(3x - 5z)$$

بما أن : $y < 7$ و $8/7$

فإن : $y = 0$

$$3x - 5z = 0 \Leftrightarrow 3x = 5z$$

ومنه : $\Rightarrow 3/z \ ; \ 5/x$

$$\Rightarrow z = 3 ; x = 5$$

$$\boxed{z = 3; y = 0; x = 5}$$

تمرين22

حدد في نظمة العد ذات الأساس 7 باقي القسمة الإقليدية ل $\overline{12015051}_{(7)}$ على 7^3

الحل

$$\overline{12015051}_{(7)} = 1\times 7^7 + 2\times 7^6 + 1\times 7^4 + 5\times 7^3 + 5\times 7 + 1$$

$$= 7^3\left(1\times 7^4 + 2\times 7^3 + 1\times 7 + 5\right) + 5\times 7 + 1$$

$$= 7^3\left(1\times 7^4 + 2\times 7^3 + 1\times 7 + 5\right) + \overline{51}_{(7)}$$

باقي القسمة الإقليدية ل $\overline{12015051}_{(7)}$ على 7^3

هو : $\boxed{\overline{51}_{(7)}}$

الأعداد العقدية

تمرين1

حدد الشكل الجبري ل z

أ- $z = \dfrac{2-3i}{4+5i}$ ب- $z = (1-i\sqrt{3})^3$ ج- $z = (1-i)^{12}$

الحل

ج-

$$z = (1-i)^{12}$$

$$= \left((1-i)^2\right)^6$$

$$= (-2i)^6$$

$$\boxed{z = -64}$$

تمرين2

حل في $\mathbb{C}$: أ- $3\overline{z} - 2iz = 1 + 2i$ ب- $3\overline{z} + 5iz \in \mathbb{R}$

ج- $3\overline{z} + 5iz \in i\mathbb{R}$ د- $1-(1+i)z + iz^2 \in i\mathbb{R}$

الحل

نعتبر : $z = x + iy$

أ- $3\overline{z} - 2iz = 1 + 2i$

$$3\overline{z} - 2iz = 1 + 2i \Leftrightarrow (3x - 2y) + (-2x - 3y)i = 1 + 2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ -2x - 3y = 2 \end{cases}$$

نجد : $z = -\dfrac{1}{13} - \dfrac{8}{13}i$

ب- $3\overline{z} + 5iz \in \mathbb{R}$

$$3\overline{z} + 5iz \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \left((3x - 5y) + (5x - 3y)i\right) \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 5x - 3y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5}{3}x$$

$$\boxed{S = \left\{x + \frac{5}{3}xi \ / \ x \in \mathbb{R}\right\}}$$

هندسيا الحل هو المستقيم الذي معادلته : $y = \dfrac{5}{3}x$

ج- $3\overline{z} + 5iz \in i\mathbb{R}$

$$3\overline{z} + 5iz \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \left((3x - 5y) + (5x - 3y)i\right) \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 3x - 5y = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{3}{5}x$$

$$\boxed{S = \left\{x + \frac{3}{5}xi \ / \ x \in \mathbb{R}\right\}}$$

هندسيا الحل هو المستقيم الذي معادلته : $y = \dfrac{3}{5}x$

د- $1-(1+i)z + iz^2 \in i\mathbb{R}$

$$1-(1+i)z + iz^2 \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (1 - x + y - 2xy) - i\left(x + y - x^2 + y^2\right) \in i\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow 1 - x + y - 2xy = 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x-1}{2x-1} ; x \neq \frac{1}{2}$$

$$\boxed{z = x + \left(\frac{x-1}{2x-1}\right)i}$$

هندسيا الحل هو الهذلول الذي معادلته : $y = \dfrac{x-1}{2x-1}$

مركزه : $\Omega\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$ مقارباه : $x = \dfrac{1}{2}$ و $y = \dfrac{1}{2}$

تذكير :

- المنحنى الممثل للدالة $f(x) = ax^2 + bx + c$ " $a \neq 0$ "

شلجم رأسه $\Omega\left(\dfrac{-b}{2a}; f\left(\dfrac{-b}{2a}\right)\right)$ و محوره المستقيم $x = \dfrac{-b}{2a}$

- المنحنى الممثل للدالة