

المتتاليات العددية: الثانية باك

99

2. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $1 \leq u_n < 3$.
3. بين أن (u_n) تزايدية و استنتج أنها متقاربة
4. حدد نهاية المتتالية (u_n) .
5. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي :

$$v_n = \frac{-3 + u_n}{2 + u_n}$$

- a. بين أن (v_n) متتالية هندسية محددًا حدّها الأول و أساسها.
- b. أكتب u_n بدلالة v_n ثم تأكد من نهاية المتتالية (u_n) .

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + \frac{3}{2}, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

1. بين أن $u_n < 2$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
2. أدرس رتبة المتتالية (u_n) و بين أنها متقاربة.
3. نضع $v_n = u_n - 2$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
- a. بين أن المتتالية $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية.
- b. استنتج أن $u_n = 2 - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4} \right)^n$ حيث $n \in \mathbb{N}$ ثم حدد نهاية المتتالية (u_n) .
4. لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

$$S_n = 2n - 1 + \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

التمرين الخامس:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على

$$I = [0, 2]$$

$$f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x}$$

تمارين محلولة

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - n + \frac{1}{4}, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2 .
 2. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة ب :
- $$v_n = u_n - \frac{n}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$$
- بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$.
3. أكتب u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$ و أحسب نهاية المتتالية (u_n) .
 4. حدد بدلالة n المجموع التالي :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n$$

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{2}u_n, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

1. بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا $0 < u_n < \frac{1}{4}$.
2. بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.
3. بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا $u_n \leq \frac{1}{5} \left(\frac{3}{4} \right)^n$.
4. أوجد نهاية المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_n = \frac{6 + 4u_{n-1}}{3 + u_{n-1}}, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال

$$I =]-1, +\infty[: f(x) = \frac{6 + 3x}{3 + x}$$

1. بين أن $f(I) \subset I$.

المتتاليات العددية: الثانية باك

67

$$u_n = 5^n + \frac{n}{4}, \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{إذن:}$$

❖ حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(5^n + \frac{n}{4} \right) = +\infty$$

4. حساب المجموع S_n

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n \\ &= \left(5^1 + \frac{1}{4} \right) + \left(5^2 + \frac{2}{4} \right) + \left(5^3 + \frac{3}{4} \right) + \dots + \left(5^n + \frac{n}{4} \right) \\ &= (5^1 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^n) + \frac{1}{4} (1 + 2 + 3 + \dots + n) \\ &= \frac{5(5^n - 1)}{5 - 1} + \frac{1}{4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{5(5^n - 1)}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left[5^{n+1} - 5 + \frac{n(n+1)}{2} \right], \forall n \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

التمرين الثاني:

$$1. \text{ لنبين أن } 0 < u_n < \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

نستعمل البرهان بالترجع

$$\text{لدينا } u_0 = \frac{1}{5} \text{ و بالتالي } 0 < u_0 < \frac{1}{4}$$

نفترض أن $0 < u_n < \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$ و لنبين أن

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

حسب الافتراض لدينا : $0 < u_n < \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

إذن

$$0 < u_n < \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 0 < u_n^2 < \frac{1}{16} \\ 0 < \frac{1}{2} u_n < \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < u_n^2 + \frac{1}{2} u_n < \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow 0 < u_n^2 + \frac{1}{2} u_n < \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{16} < \frac{1}{4} \right)$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}$$

$$\boxed{0 < u_n < \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}} \quad \text{إذن}$$

و نعتبر المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[3]{-u_n^2 + 2u_n}, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. أحسب $f'(x)$ لكل x من $]0, 2]$ و ضع

جدول

تغيرات الدالة f .

2. استنتج أن لكل $x \in [0, 2]$ لدينا

$$0 \leq f(x) \leq 1$$

3. بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا $0 < u_n < 1$.

4. أدرس رتبة المتتالية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ و استنتج

أنها متقاربة.

5. أحسب النهاية $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

حلول التمارين

التمرين الأول:

1. حساب u_1 و u_2

$$\begin{cases} u_1 = 5u_0 - 0 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4} \\ u_2 = 5u_1 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{51}{2} \end{cases}$$

2. لنبين أن المتتالية هندسية

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{n+1}{4} = 5u_n - n + \frac{1}{4} - \frac{n+1}{4} \\ &= 5u_n - \frac{5n}{4} = 5 \left(u_n - \frac{n}{4} \right) = 5v_n \end{aligned}$$

ومنه فإن المتتالية هندسية أساسها $q = 5$ و

$$\text{حدها الأول هو } v_0 = u_0 - \frac{0}{4} = 1$$

3. تحديد u_n بدلالة n

$$\text{لدينا } u_n = v_n + \frac{n}{4} \text{ و بالتالي } v_n = u_n - \frac{n}{4}$$

من جهة أخرى نعلم أن المتتالية (v_n)

هندسية و بالتالي حسب صيغة الحد العام

لهذه المتتالية لدينا :

$$v_n = v_0 \times (5)^{n-0} = 5^n$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{4} \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right) \leq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

حسب البرهان بالترجع لدينا :

$$u_n \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

4. نهاية المتتالية (u_n)

$$\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ لدينا}$$

$$\text{بما أن } -1 < \frac{3}{4} < 1 \text{ فإن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0 \text{ و}$$

بالتالي :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$$

التمرين الثالث :

1. لنبين أن $f(I) \subset I$

$$\forall x \in I, f'(x) = \frac{6}{(x+3)^2} > 0$$

و بالتالي الدالة f تزايدية قطعاً على المجال I .

$$f(I) = \left] \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]1, 4[$$

$$\text{إذن }]1, 4[\subset]-1, +\infty[$$

2. لنبين أن $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < 3$

نستعمل البرهان بالترجع

$$\leftarrow \text{لدينا } u_0 = 1 \text{ إذن } 1 \leq u_0 < 3$$

$$\leftarrow \text{نفترض أن } 1 \leq u_n < 3, n \in \mathbb{N}$$

$$\leftarrow \text{نبين أن } 1 \leq u_{n+1} < 3, n \in \mathbb{N}$$

نعلم أن f تزايدية قطعاً على I و حسب

$$\text{الافتراض } 1 \leq u_n < 3 \text{ إذن } f(1) \leq f(u_n) < f(3)$$

2. لنبين أن المتتالية تناقصية

لدينا

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + \frac{1}{2}u_n - u_n = u_n \left(u_n - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{حسب ما سبق لدينا } 0 < u_n < \frac{1}{4} \text{ إذن}$$

$$-\frac{1}{2} < u_n - \frac{1}{2} < -\frac{1}{4} \text{ و بالتالي } u_{n+1} - u_n < 0 \text{ إذن}$$

المتتالية تناقصية.

$$3. \text{ لنبين أن } u_n \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

نستعمل البرهان بالترجع

$$\leftarrow \text{لدينا } u_0 = \frac{1}{5} \text{ و بالتالي } u_0 \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^0$$

$$\leftarrow \text{نفترض أن } u_n \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n, n \in \mathbb{N}$$

$$\leftarrow \text{لنبين أن } u_{n+1} \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{حسب الافتراض } u_n \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n, n \in \mathbb{N} \text{ إذن}$$

$$u_n \left(u_n + \frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow u_n^2 + \frac{1}{2}u_n \leq \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{لنقارن بين } \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \text{ و } \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left[\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\right]$$

$$= \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n \left[\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n - \frac{1}{4}\right]$$

$$\text{بما أن } \forall n \in \mathbb{N}, \left(\frac{3}{4}\right)^n \leq 1, \frac{1}{5} < \frac{1}{4} \text{ فإن :}$$

المتتاليات العددية: الثانية باك

69

(a) لنبين أن المتتالية (v_n) هندسية

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{-3+u_{n+1}}{2+u_{n+1}} = \frac{-3+\frac{6+4u_n}{3+u_n}}{2+\frac{6+4u_n}{3+u_n}} \\ &= \frac{-9-3u_n+6+4u_n}{6+2u_n+6+4u_n} = \frac{-3+u_n}{12+6u_n} \\ &= \frac{1}{6} \left(\frac{-3+u_n}{2+u_n} \right) = \frac{1}{6} v_n \end{aligned}$$

و بالتالي فإن المتتالية (v_n) متتالية هندسية

أساسها $q = \frac{1}{6}$ و حدها الأول

$$v_0 = \frac{-3+u_0}{2+u_0} = \frac{-2}{3}$$

(b) كتابة u_n بدلالة n

حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية
نجد أن :

$$v_n = \frac{-2}{3} \left(\frac{1}{6} \right)^n, n \in \mathbb{N}$$

من جهة أخرى لدينا :

$$v_n = \frac{-3+u_n}{2+u_n} \Leftrightarrow 2v_n + v_n u_n = -3+u_n$$

$$\Leftrightarrow u_n (1-v_n) = 3+2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{3+2v_n}{1-v_n} = \frac{3-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}, n \in \mathbb{N}$$

التمرين الرابع:

1. لنبين أن $u_n < 0, n \in \mathbb{N}$

نستعمل البرهان بالترجع

$$\leftarrow \text{لدينا } u_0 = \frac{5}{4} \text{ إذن } u_0 < 2$$

$$\leftarrow \text{نفترض أن } u_n < 2, n \in \mathbb{N}$$

$$\leftarrow \text{لنبين أن } u_{n+1} < 2, n \in \mathbb{N}$$

$$u_n < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2} < \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} < 2, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{و } f(1) = \frac{10}{4} \geq 1 \text{ و } f(3) = \frac{18}{6} = 3$$

$$f(u_n) = u_{n+1}$$

$$\text{بالتالي } \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_{n+1} < 3$$

إذن حسب البرهان بالترجع $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq u_n < 3$

3. لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية

لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية يكفي أن نبين أن

$$u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

نستعمل البرهان بالترجع

$$\leftarrow \text{لدينا } u_0 = 1 \text{ و } u_1 = \frac{5}{2} \text{ إذن } u_1 \geq u_0$$

$$\leftarrow \text{نفترض أن } u_n \geq u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

$$\leftarrow \text{لنبين أن } u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

نعلم أن f تزايدية قطعاً على I و حسب

الافتراض

$$u_n \geq u_{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ إذن}$$

$$f(u_n) \geq f(u_{n-1})$$

$$u_{n+1} \geq u_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

ومنه فإن المتتالية (u_n) تزايدية.

المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد 3 و

بالتالي فإنها متقاربة.

4. تحديد نهاية المتتالية (u_n)

بما أن f متصلة على I و $f(I) \subset I$

$$u_n \in I \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N} \text{ و } u_{n+1} = f(u_n)$$

المتتالية (u_n) متقاربة فإن l نهاية المتتالية

(u_n) تحقق ما يلي :

$$f(l) = l, l \in I$$

$$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{6+4l}{3+l} = l \Leftrightarrow 6+4l = 3l+l^2$$

$$\Leftrightarrow l^2 - l - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow l = 3, l = -2$$

$$\text{إذن } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$$

$$5. \text{ لدينا } v_n = \frac{-3+u_n}{2+u_n}$$

المتتاليات العددية: الثانية باك

70

$$\begin{aligned}
 S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} \\
 &= (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + \dots + (v_{n-1} + 2) \\
 &= (v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}) + (2 + 2 + \dots + 2) \\
 &= \frac{-3}{4} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} + 2n \\
 &= \frac{-3}{4} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{\frac{3}{4}} + 2n \\
 &= 2n - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n
 \end{aligned}$$

إذن $S_n = 2n - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

التمرين الخامس:

1. حساب الدالة المشتقة ووضع جدول

التغيرات

$$\forall x \in]0, 2[, f'(x) = \frac{-2x + 2}{3\sqrt[3]{(-x^2 + 2x)^2}}$$

جدول تغيرات الدالة f

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	0	1	0

2. لنبين أن $0 \leq f(x) \leq 1, x \in [0, 2]$

من خلا جدول التغيرات نستنتج أن

$$\forall x \in [0, 2], 0 \leq f(x) \leq f(1) \text{ لأن } f(1) \text{ قيمة}$$

قصوى للدالة f . أي $0 \leq f(x) \leq 1, x \in [0, 2]$.

3. لنبين أن $0 < u_n < 1, n \in \mathbb{N}$

نوظف البرهان بالترجع

← لدينا $u_0 = \frac{1}{2}$ إذن $0 < u_0 < 1$

← نفترض أن $0 < u_n < 1, n \in \mathbb{N}$

← لنبين أن $0 < u_{n+1} < 1, n \in \mathbb{N}$

و بالتالي حسب البرهان بالترجع لدينا

$$u_n < 2, n \in \mathbb{N}$$

2. لنبين أن المتتالية تزايدية

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2} - u_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}u_n \\
 &= \frac{3}{4}(2 - u_n)
 \end{aligned}$$

بما أن $u_n < 2$ فإن $2 - u_n > 0$ و بالتالي

$$u_{n+1} - u_n > 0$$

إذن المتتالية (u_n) تزايدية.

المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد 2 إذن فهي متقاربة.

3. $v_n = u_n - 2, n \in \mathbb{N}$

(a) لنبين أن المتتالية هندسية

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= u_{n+1} - 2 = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2} - 2 \\
 &= \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(u_n - 2) = \frac{1}{4}v_n
 \end{aligned}$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ و

$$v_0 = u_0 - 2 = -\frac{3}{4} \text{ حدها الأول}$$

(b) تحديد نهاية المتتالية (u_n)

حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا :

$$v_n = -\frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n = v_n + 2 = 2 - \frac{3}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0 \text{ فإن } -1 < \frac{1}{4} < 1 \text{ بما أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

4. حساب المجموع S_n

المتتاليات العددية: الثانية باك

تمارين للإيجاز

التمرين الأول :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال

$$f(x) = \frac{5x+2}{x+3} : I = [2, 3]$$

1. ضع جدول تغيرات الدالة f ثم بين أن $f(I) \subset I$.

2. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{5u_n+2}{u_n+3}, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 2 \end{cases}$$

(a) بين أن $2 \leq u_n \leq 3, n \in \mathbb{N}$.

(b) بين أن (u_n) متتالية تزايدية.

(c) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{3u_n^2+2}{3u_n+1}, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. بين أن

$$\forall n \in \mathbb{N} : 2 - u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+3u_n} (2 - u_n)$$

2. بين بالترجع أن $0 < u_n < 2, n \in \mathbb{N}$.

3. بين أن المتتالية (u_n) تزايدية و استنتج أنها متقاربة.

$$4. \text{ بين أن } \forall n \in \mathbb{N}, \frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$$

$$5. \text{ استنتج أن } \forall n \in \mathbb{N}, 2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$6. \text{ أحسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

التمرين الثالث :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال

$$f(x) = \frac{x}{1+\sqrt[3]{x}} : \mathbb{R}^+$$

نعلم أن f تزايدية قطعاً على $[0, 1]$ و حسب الافتراض

$$f(0) < f(u_n) < f(1) \text{ إذن } 0 < u_n < 1, n \in \mathbb{N}$$

يعني

$$0 < u_{n+1} < 1 \text{ إذن حسب البرهان بالترجع لدينا } 0 < u_n < 1, n \in \mathbb{N}$$

4. دراسة رتابة المتتالية (u_n)

لندرس إشارة $u_n - u_{n-1}$. لهذا الغرض نستعمل البرهان بالترجع.

$$\leftarrow \text{ لدينا } u_1 - u_0 > 0$$

$$\leftarrow \text{ نفترض أن } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_n - u_{n-1} > 0$$

$$\leftarrow \text{ لنبين أن } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$$

نعلم أن f تزايدية قطعاً على $[0, 1]$ و حسب الافتراض

$$u_n > u_{n-1} \text{ إذن } f(u_n) > f(u_{n-1}) \text{ يعني}$$

$$u_{n+1} > u_n \text{ و منه فإن المتتالية } (u_n) \text{ تزايدية.}$$

بما أن المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد 1 فإنها متقاربة.

5. نهاية المتتالية (u_n)

بما أن f دالة متصلة على المجال $[0, 1]$ و

$$[0, 1] \subset [0, 1] \text{ و } f([0, 1]) \subset [0, 1] \text{ لكل } n \in \mathbb{N} \text{ و}$$

$$u_{n+1} = f(u_n) \text{ و } (u_n) \text{ متقاربة إذن } l \text{ نهاية}$$

$$(u_n) \text{ تحقق ما يلي : } f(l) = l \text{ و } l \in [0, 1]$$

$$f(l) = l \Leftrightarrow \sqrt[3]{-l^2 + 2l} = l$$

$$\Leftrightarrow -l^2 + 2l = l^3$$

$$\Leftrightarrow l^3 + l^2 - 2l = 0$$

$$\Leftrightarrow l(l^2 + l - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow l(l-1)(l+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow l = 0, l = 1, l = -2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

ترقبوا المزيد من التمارين المحلوّلة على

www.bestcours.net

1. بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq x$.

2. حدد صورة المجال $I = [0, 1]$ بالدالة f .

3. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

(a) تحقق أن $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.

(b) استنتج أن (u_n) متقاربة و أحسب

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

1. بين أن الدالة f رتيبة

قطعا على المجال $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$ ثم استنتج

$$f(I)$$

نعتبر المتتالية العددية

(u_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 3}{2}} \end{cases}$$

(a) بين أن : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2} : (\forall n \in \mathbb{N})$.

(b) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

(c) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة , ثم حدد

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$$