

~ الثانية علوم تجريبية ~

سلسلة الاشتقاق

[7 تمارين محلولة]

التمرين 1:

أدرس قابلية اشتقاق f في العدد a ثم اعط تأويلا هندسيا للنتيجة :

$$f(x) = x^3 + 1 \quad a = 2 \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt{x-1} \quad a = 1^+ \quad (2)$$

التمرين 2:

أحسب مشتقة الدالة f في الحالات التالية : (غير مطلوب دراسة قابلية للاشتقاق)

$$f(x) = 6x - \sqrt{7} \quad (1)$$

$$f(x) = x^2 - \frac{5}{2}x \quad (2)$$

$$f(x) = x \cdot \sin x \quad (3)$$

$$f(x) = (\cos x)^4 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{x+1} \quad (5)$$

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 7} \quad (6)$$

$$f(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad (7)$$

$$f(x) = \cos(x^3) \quad (8)$$

$$f(x) = \tan(4x) \quad (9)$$

التمرين 3:

أحسب مشتقة الدالة f في الحالات التالية : (غير مطلوب دراسة قابلية للاشتقاق)

$$f(x) = \sqrt[3]{3x+1} \quad (1)$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^2} \quad (2)$$

$$f(x) = x \cdot \sqrt[3]{x} \quad (3)$$

$$f(x) = (\sqrt[3]{x})^5 \quad (4)$$

$$f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} \quad (5)$$

التمرين 4:

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي : $f(x) = x^3 + x$

(1) بين أن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده

(2) تحقق أن : $f^{-1}(2) = 1$

(3) بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق في 2

(4) أحسب : $(f^{-1})'(2)$

التمرين 5:

لتكن f الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} - 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} & ; x \geq 1 \end{cases}$$

1. أدرس اتصال f في 1

2. أدرس اشتقاق f في 1

3. أول النتائج هندسيا

التمرين 6:

أحسب مشتقات الدوال التالية : (غير مطلوب دراسة قابلية للاشتقاق)

$$(1) f(x) = x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 5x - 4$$

$$(2) f(x) = (2x + 1)\sqrt{x}$$

$$(3) f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 3}$$

$$(4) f(x) = (4 - 3x)^3$$

$$(5) f(x) = \frac{4}{(x^2 - 1)^3}$$

$$(6) f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$$

$$(7) f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

$$(8) f(x) = \sin^4 x - \cos^2 x$$

$$(9) f(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$(10) f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$$

$$(11) f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x + 2}$$

التمرين 7:

لتكن f الدالة المعرفة بما يلي : $f(x) = x^3 - 3x - 3$

1. أدرس تغيرات f على \mathbb{R}
2. ليكن g قصور f على المجال $[1, +\infty[$
 - أ. بين أن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من مجال J يتم تحديده نحو $[1, +\infty[$
 - ب. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $[1, +\infty[$ ثم تحقق أن $2 < \alpha < 3$
3. بين أن : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$

تصحيح التمرين 1:

(1) لندرس قابلية اشتقاق f في العدد $a=2$ لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 1 - 9}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 \\ &= 12\end{aligned}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في العدد 2 ولدينا : $f'(2) = 12$

التأويل الهندسي : C_f يقبل مماس في النقطة $A(2,9)$ معاملته الموجه : 12

و معادلته : $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

$$\boxed{y = 12x + 15}$$

(2) لندرس قابلية اشتقاق f في العدد $a=1$ على اليمين : لدينا :

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{\sqrt{x - 1}}{x - 1} \\ &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \frac{1}{\sqrt{x - 1}} \\ &= +\infty\end{aligned}$$

إذن f غير قابلة للاشتقاق في العدد $a=1$ على اليمين

التأويل الهندسي : C_f يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(1,0)$

تصحيح التمرين 2:

$$f'(x) = (6x - \sqrt{7})' = 6 \quad (1)$$

$$f'(x) = \left(x^2 - \frac{5}{2}x\right)' = 2x - \frac{5}{2} \quad (2)$$

$$f'(x) = (x \cdot \sin x)' = (x)' \cdot \sin x + x \cdot \sin'(x) = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cdot \cos x \quad (3)$$

$$f'(x) = ((\cos)^4)'(x) = 4 \cdot \cos'(x) \cdot \cos^{4-1}(x) = -4 \sin(x) \cdot \cos^3(x) \quad (4)$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2}{x+1} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (x+1) - x^2 \cdot (x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{2x(x+1) - x^2}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2} = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} \quad (5)$$

$$f'(x) = (\sqrt{x^2+7})' = \frac{(x^2+7)'}{2\sqrt{x^2+7}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+7}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+7}} \quad (6)$$

$$f'(x) = \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right) \right)' = \left(\frac{1}{x}\right)' \cdot \sin'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \quad (7)$$

$$f'(x) = (\cos(x^3))' = (x^3)' \cdot \cos'(x^3) = -3x^2 \cdot \sin(x^3) \quad (8)$$

$$f'(x) = (\tan(4x))' = (4x)' \cdot \tan'(4x) = 4 \cdot (1 + \tan^2(4x)) \quad (9)$$

تصحیح التمرين 3:

$$f'(x) = (\sqrt[3]{3x+1})' = \frac{(3x+1)'}{3\sqrt[3]{3x+1}^2} = \frac{3}{3\sqrt[3]{3x+1}^2} = \frac{1}{\sqrt[3]{3x+1}^2} \quad (1)$$

$$f'(x) = (\sqrt[3]{x^2})' = \frac{(x^2)'}{3\sqrt[3]{x^2}^2} = \frac{2x}{3\sqrt[3]{x^4}} = \frac{2x}{3x\sqrt[3]{x}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} \quad (2)$$

$$f'(x) = (x \cdot \sqrt[3]{x})' = (x)' \cdot \sqrt[3]{x} + x \cdot (\sqrt[3]{x})' = \sqrt[3]{x} + x \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2} = \sqrt[3]{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{3} = \frac{4}{3}\sqrt[3]{x} \quad (3)$$

$$f'(x) = ((\sqrt[3]{x})^5)' = 5 \cdot (\sqrt[3]{x})' (\sqrt[3]{x})^{5-1} = 5 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x}^2} \cdot \sqrt[3]{x}^4 = \frac{5}{3}\sqrt[3]{x}^2 \quad (4)$$

(5)

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt[3]{x^3+1}}{x} \right)' = \frac{(\sqrt[3]{x^3+1})' \cdot x - \sqrt[3]{x^3+1} \cdot (x)'}{x^2} = \frac{\frac{(x^3+1)'}{3\sqrt[3]{x^3+1}^2} \cdot x - \sqrt[3]{x^3+1}}{x^2} = \frac{\frac{3x^2}{3\sqrt[3]{x^3+1}^2} \cdot x - \sqrt[3]{x^3+1}}{x^2} = \frac{\frac{x^3}{\sqrt[3]{x^3+1}^2} - \sqrt[3]{x^3+1}}{x^2} = \frac{x^3 - (\sqrt[3]{x^3+1})^2}{x^2 \sqrt[3]{x^3+1}^2}$$

تصحيح التمرين 4:

(1)

✓ دالة متصلة على \mathbb{R} (لأنها دالة حدودية)
✓ قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} (لأنها دالة حدودية)
ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$\text{لدينا : } f'(x) = (x^3 + x)' = 3x^2 + 1$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = 3x^2 + 1$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) > 0$$

و منه f تزايدية قطعاً على \mathbb{R}

و بالتالي f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة على مجال J نحو \mathbb{R}

$$\text{بحيث : } J = f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

(2)

$$\begin{aligned} f^{-1}(2) = \alpha &\Leftrightarrow f(\alpha) = 2 \\ &\Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha = 2 \\ &\Leftrightarrow \alpha^3 + \alpha - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (\alpha - 1)(\alpha^2 + \alpha + 2) = 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{l} \alpha^2 + \alpha + 2 = 0 \\ \Delta = -7 \end{array} \right) : \text{لدينا}$$

$$\text{إذن : } \alpha = 1 \Leftrightarrow f^{-1}(2) = \alpha \text{ و منه : } f^{-1}(2) = 1$$

(3) لدينا : $f(1) = 2$

✓ f قابلة للاشتقاق في 1

$$f'(1) = 4 \neq 0 \quad \checkmark$$

إذن f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(1) = 2$

$$(f^{-1})'(2) = (f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4} \quad (4)$$

تصحيح التمرين 5:

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x} - 1 & ; 0 \leq x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2 - 1}{4} & ; x \geq 1 \end{cases}$$

لتكن f الدالة المعرفة على $[0, +\infty[$ بما يلي :

$$(1) \text{ لدينا : } f(1) = \frac{1^2 - 1}{4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x} - 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{4} = 0 \quad \checkmark$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$ فإن f متصلة في 1.

(2)

$$\checkmark \text{ لدينا : } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في العدد 1 على اليسار و لدينا : $f'_g(1) = \frac{1}{2}$

$$\checkmark \text{ و لدينا : } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{x^2 - 1}{4}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x + 1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

إذن f قابلة للاشتقاق في العدد 1 على اليمين و لدينا : $f'_d(1) = \frac{1}{2}$

► بما أن f قابلة للاشتقاق في العدد 1 على اليسار و على اليمين و $f'_d(1) = f'_g(1)$ فإن f قابلة

للاشتقاق في العدد 1 و لدينا : $f'(1) = \frac{1}{2}$

(3) التأويل الهندسي : C_f يقبل مماس في النقطة $A(1,0)$ معامله الموجه : $\frac{1}{2}$

$$\text{و معادلته : } y = f'(1)(x - 1) + f(1) \text{ أي } y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$$

تصحيح التمرين 6:

$$f'(x) = \left(x^5 + \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 + 5x - 4 \right)' = 5x^4 + 2x^3 - 6x^2 + 5 \quad (1)$$

$$f'(x) = \left((2x+1)\sqrt{x} \right)' = (2x+1)' \sqrt{x} + (2x+1)(\sqrt{x})' = 2\sqrt{x} + (2x+1) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{4x+2x+1}{2\sqrt{x}} = \frac{6x+1}{2\sqrt{x}} \quad (2)$$

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+x+1}{x+3} \right)' = \frac{(x^2+x+1)' \times (x+3) - (x^2+x+1) \times (x+3)'}{(x+3)^2} = \frac{(2x+1)(x+3) - (x^2+x+1)}{(x+3)^2} = \frac{2x^2+6x+x+3-x^2-x-1}{(x+3)^2} = \frac{x^2+6x+2}{(x+3)^2} \quad (3)$$

$$f'(x) = \left((4-3x)^3 \right)' = 3(4-3x)'(4-3x)^{3-1} = (3) \times (-3)(4-3x)^2 = -9(4-3x)^2 \quad (4)$$

$$f'(x) = \left(\frac{4}{(x^2-1)^3} \right)' = 4 \times \left(\frac{1}{(x^2-1)^3} \right)' = 4 \times \frac{-((x^2-1)^3)'}{(x^2-1)^6} = -4 \times \frac{3(x^2-1)'(x^2-1)^2}{(x^2-1)^6} = -12 \times \frac{2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-24}{(x^2-1)^4} \quad (5)$$

$$f'(x) = \left(\sqrt{2x^2-3x+1} \right)' = \frac{(2x^2-3x+1)'}{2\sqrt{2x^2-3x+1}} = \frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x+1}} \quad (6)$$

$$f'(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x} \right)' = \frac{(\sqrt{x^2-1})' \times x - \sqrt{x^2-1} \times (x)'}{x^2} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \times x - \sqrt{x^2-1}}{x^2} = \frac{\frac{x^2-x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2} = \frac{1}{x^2\sqrt{x^2-1}} \quad (7)$$

$$f'(x) = (\sin^4 x - \cos^2 x)' = 4\sin^3(x)\sin'(x) - 2\cos'(x)\cos x = 4\cos(x)\sin^3(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 2\sin(x)\cos(x)(2\sin^2(x)+1) \quad (8)$$

$$f'(x) = \left(\cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \right)' = -2\sin \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) \quad (9)$$

$$f'(x) = \left(x + \sqrt{x^2-1} \right)' = 1 + \frac{(x^2-1)'}{2\sqrt{x^2-1}} = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}} \quad (10)$$

$$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x^3-3x+2} \right)' = \frac{(x^3-3x+2)'}{3\sqrt[3]{x^3-3x+2}^2} = \frac{3x^2-3}{3\sqrt[3]{x^3-3x+2}^2} = \frac{x^2-1}{\sqrt[3]{x^3-3x+2}^2} \quad (11)$$

تصحيح التمرين 7:

1. لندرس تغيرات f على \mathbb{R}
لدينا f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} لأنها دالة حدودية
ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = (x^3 - 3x - 3)' = 3x^2 - 3$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) = 3(x^2 - 1)$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ أو } x = 1)$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$3(x^2-1)$	+	0	-	0	+

على المجالين $]-\infty, -1]$ و $[1, +\infty[$:

لدينا $f'(x) \geq 0$ و $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ أو } x = 1)$ إذن f تزايدية قطعا

على المجال $[-1, 1]$:

لدينا $f'(x) \leq 0$ و $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x = -1 \text{ أو } x = 1)$ إذن f تناقصية قطعا

2. ليكن g قصور f على المجال $[1, +\infty[$

أ-

✓ لدينا g دالة متصلة على المجال $[1, +\infty[$ (كقصور لدالة حدودية)

✓ و لدينا : g تزايدية قطعا على المجال $[1, +\infty[$

إذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من مجال J نحو $[1, +\infty[$

$$\text{حيث : } J = g([1, +\infty[) = \left[g(1), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right[= [-5, +\infty[$$

ب-

✓ لدينا g دالة متصلة على المجال $[1, +\infty[$

✓ و لدينا : g تزايدية قطعا على المجال $[1, +\infty[$

✓ و كذلك : $0 \in g([1, +\infty[)$

إذن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $[1, +\infty[$

- ✓ لدينا g دالة متصلة على $[0,1]$
✓ ولدينا : $g(2) \times g(3) < 0$ ($g(2) = -1$ و $g(3) = 15$)
إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : $2 < \alpha < 3$

.3

- ✓ لدينا g قابلة للاشتقاق في α
✓ ولدينا : $g'(\alpha) = 3(\alpha^2 - 1) \neq 0$
إذن g^{-1} قابلة للاشتقاق في $g(\alpha) = 0$
ولدينا : $(g^{-1})'(0) = (g^{-1})'(g(\alpha)) = \frac{1}{g'(\alpha)} = \frac{1}{3(\alpha^2 - 1)}$

つづく