السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	النهايات و الاتصال	سلسلة 1

تمرين 1 : احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\mapsto+\infty} x+3-\sqrt{x+3} \qquad \lim_{x\mapsto-\infty} x+3-\sqrt{x^2+4x} \qquad \lim_{x\mapsto+\infty} \sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{x+\sqrt{x}}$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty} \sqrt{1+2x^3}-\sqrt{x^3+x+1} \qquad \lim_{x\mapsto-\infty}\left(\sqrt{5x^2+x+1}-mx\right) \text{ حيث } m\in IR$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^4+1}}\right) \qquad \lim_{x\mapsto-\infty}\left(\frac{x+1-\sqrt{1-x}}{x^2-\sqrt{x^2+2}}\right) \qquad \lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\cos(x)+5\sin(x^2)}{x^4+x^2+1}$$

تمرين 2 : احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\mapsto-1}\left(\frac{\sqrt{1-3x}-2}{x+1}\right) \qquad \lim_{x\mapsto2^+}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}\right) \qquad \lim_{x\mapsto-2^-}\left(\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}\right)$$

$$\lim_{x\mapsto1}\left(\frac{x^2+x-2}{x^3+4x^2-8x+3}\right) \qquad \lim_{x\mapsto1}\left(\sin\left(\frac{5}{1-x^3}\right)(x^2-2x+1)\right) \qquad \lim_{x\mapsto0^+}\left(\frac{1}{x}+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)$$

تمرين 3 : احسب النهايات التالية:

$$\lim_{x\mapsto0}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cos x-\sin^2 x-\sqrt{3}}\right) \qquad \lim_{x\mapsto3}\frac{\sin(\pi x)}{x-3} \qquad \lim_{x\mapsto0}\left(\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin^2 x-\sqrt{3}}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{6x-\pi}\right) \qquad \lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right) \qquad \lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{1-\cos(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{1-\tan(x)}\right)$$

تمرين 4 : ليكن $a\in IR$ و f_a الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f_a(x)=\dfrac{1}{x+a}-\dfrac{a^2x^2}{x^3+a^3}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f_a

2) حدد قيم العدد a التي من أجلها تقبل f_a نهاية في $-a$

تمرين 5 : ليكن m عددا حقيقيا و لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x)=\frac{mx^3+(m-2)x^2+(m-1)x+m-3}{x(x-2)(x-3)}$$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) ادرس نهاية الدالة f عند $+\infty$ و $-\infty$ و 0 حسب قيم البارامتر m

تمرين 6 : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2}$

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب $\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)$

3) بين أن f تقبل تمديدا بالاتصال في 2 وحده.

تمرين 1 :

$$\lim_{x\mapsto+\infty} x+3-\sqrt{x+3}=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\sqrt{x+3}\right)^2-\sqrt{x+3}=\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x+3}\left(\sqrt{x+3}-1\right)=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty} x+3-\sqrt{x^2+4x}=\lim_{x\mapsto+\infty} x+2-\sqrt{x^2+4x}+1=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^2+4x+4-x^2-4x}{x+2+\sqrt{x^2+4x}}+1$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{4}{x+2+\sqrt{x^2+4x}}+1=0+1=1$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{\sqrt{x}+1}-\sqrt{x+\sqrt{x}}=\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{\sqrt{x}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}-\sqrt{x\left(1+\frac{\sqrt{x}}{x}\right)}$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{\sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}-\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x}\left(\frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}-\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}\right)=-\infty$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{1+2x^3}-\sqrt{x^3+x+1}=\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^3}\sqrt{\frac{1}{x^3}+2}-\sqrt{x^3}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}$$

$$=\lim_{x\mapsto+\infty}\sqrt{x^3}\left(\sqrt{\frac{1}{x^3}+2}-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}\right)=+\infty$$

- إذا كان $m>0$ فإن : $\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\sqrt{5x^2+x+1}-mx\right)=+\infty$ $\quad\left(\lim_{x\mapsto-\infty}-mx=+\infty\right)$
- إذا كان $m=0$ فإن : $\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\sqrt{5x^2+x+1}-mx\right)=\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\sqrt{5x^2+x+1}\right)+\infty$
- إذا كان $-\sqrt{5}<m<0$ فإن :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\sqrt{5x^2+x+1}-mx\right)=\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\sqrt{x^2\left(5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-mx\right)=\lim_{x\mapsto-\infty}\left(-x\sqrt{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-mx\right)$$

$$=\lim_{x\mapsto-\infty}-x\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+m\right)=+\infty$$

- إذا كان $m=-\sqrt{5}$ فإن :

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\sqrt{5x^2+x+1}-mx\right)=\lim_{x\mapsto-\infty}\sqrt{5x^2+x+1}+\sqrt{5}\,x=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x+1}{\sqrt{5x^2+x+1}-\sqrt{5}\,x}$$

$$=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{5}\,x}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}}{-x\sqrt{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-\sqrt{5}\,x}=\frac{-1}{2\sqrt{5}}$$

- إذا كان $m<-\sqrt{5}$ فإن : $\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\sqrt{5x^2+x+1}-mx\right)=\lim_{x\mapsto-\infty}-x\left(\sqrt{5+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+m\right)=-\infty$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^4-1}}\right)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\left(x^2-\left(x^2+1\right)\right)\left(x^2+\sqrt{x^4-1}\right)}{\left(x^4-\left(x^4-1\right)\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-\left(x^2+x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}\right)}{\left(x+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^4-1}}\right)=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-x\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}=-\infty$$

$$\lim_{x\mapsto-\infty}\left(\frac{x+1-\sqrt{1-x}}{x^2-\sqrt{x^2+2}}\right)=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}-\frac{\sqrt{1-x}}{x}\right)}{x^2+x\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}}=\lim_{x\mapsto-\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1-x}{x^2}}}{x\left(1+\frac{1}{x}\sqrt{1+\frac{2}{x^2}}\right)}=0$$

لدينا : $\forall x\in IR\ \left|\cos x+5\sin x^2\right|\le\left|\cos x\right|+\left|5\sin x^2\right|\le 1+5\le 6$

منه : $\left|\frac{\cos x+5\sin x^2}{x^4+x^2+1}\right|\le\frac{6}{x^4+x^2+1}$ ، $\forall x\in IR$ وبما أن $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x^4+x^2+1}=0$ فإن:

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{\cos x+5\sin x^2}{x^4+x^2+1}=0$$

تمرين 2 :

$$\lim_{x\mapsto-1}\left(\frac{\sqrt{1-3x}-2}{x+1}\right)=\lim_{x\mapsto-1}\frac{1-3x-4}{(x+1)\left(\sqrt{1-3x}+2\right)}=\lim_{x\mapsto-1}\frac{-3}{\sqrt{1-3x}+2}=\frac{-3}{4}$$

$$\lim_{x\mapsto2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}=\lim_{x\mapsto2^+}\sqrt{\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)^2}}=\lim_{x\mapsto2^+}\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}=+\infty$$

$$\lim_{x\mapsto-2^-}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x+2}=\lim_{x\mapsto2^-}-\frac{\sqrt{x^2-4}}{-(x+2)}=\lim_{x\mapsto2^+}-\sqrt{\frac{(x-2)(x+2)}{(x+2)^2}}=\lim_{x\mapsto2^+}-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}=-\infty$$

$$\lim_{x\mapsto1}\left(\frac{x^2+x-2}{x^3+4x^2-8x+3}\right)=\lim_{x\mapsto1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+5x-3)}=1$$

$$\lim_{x\mapsto1}\left(\sin\left(\frac{5}{1-x^3}\right)\left(x^2-2x+1\right)\right)=\lim_{x\mapsto1}\sin\left(\frac{5}{1-x^3}\right)(x-1)^2=0$$

لأن : $\forall x\in IR\ \left|\sin\left(\frac{5}{1-x^3}\right)\right|\le1\ \Rightarrow\ \forall x\in IR\ \left|\sin\left(\frac{5}{1-x^3}\right)(x-1)^2\right|\le(x-1)^2$

و $\lim_{x\mapsto1}(x-1)^2=0$ و ذلك حسب مصاديق تقارب نهاية دالة.

$\lim_{x\mapsto0^+}\frac{1}{x}+\cos\left(\frac{1}{x}\right)=+\infty$ لأن: $\forall x>0\ \cos\left(\frac{1}{x}\right)\ge+1\ \Rightarrow\forall x>0\ \frac{1}{x}+\cos\left(\frac{1}{x}\right)\ge\frac{1}{x}+1$ و $\lim_{x\mapsto0^+}\frac{1}{x}+1=+\infty$

وذلك حسب مصاديق تقارب نهاية دالة.

تمرين 3 :

$$\lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{1}{\sqrt{3}\cos x-\sin^2 x-\sqrt{3}}\right)=\lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{1}{\sqrt{3}(\cos x-1)-\sin^2 x}\right)=\lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}(1-\cos(x))+\sin^2 x}\right)$$

$$=\lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{3}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2}\right)=-\infty$$

(لأن: $\lim_{x\mapsto 0}\sqrt{3}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)+\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+1$ و $\lim_{x\mapsto 0}-\frac{1}{x^2}=-\infty$)

$$\lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{\sqrt{3}\cos x-\sin^2 x-\sqrt{3}}{x^2}\right)=\lim_{x\mapsto 0}\left(-\sqrt{3}\left(\frac{1-\cos(x)}{x^2}\right)-\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2\right)=\frac{-\sqrt{3}}{2}-1$$

$$\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\cos x-\sqrt{3}\sin x}{6x-\pi}\right)=\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{6}}\left(\frac{2\left(\frac{1}{2}\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)}{6\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\right)=\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{3}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos x-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\sin x}{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\right)$$

$$=\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{6}}\left(\frac{1}{3}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\right)==\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{6}}\left(\frac{-1}{3}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}{\left(x-\frac{\pi}{6}\right)}\right)=\lim_{t\mapsto 0}\left(\frac{-1}{3}\frac{\sin(t)}{t}\right)=\frac{-1}{3}$$

(قمنا بتغيير المتغير x وذلك بوضع $t=x-\frac{\pi}{6}$)، كما يمكن إجراء تغيير المتغير منذ البداية.

نضع $t=x-\frac{\pi}{4}$

$$\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x-\sqrt{2}}\right)=\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\left(1+\tan(x)\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos x-\sqrt{2}}\right)$$

$$\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\tan x-1}{2\cos x-\sqrt{2}}\right)=\lim_{t\mapsto 0}\left(\frac{\left(1+\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)\tan(t)}{2\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)-\sqrt{2}}\right)=\lim_{t\mapsto 0}\left(\frac{\left(1+\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)\tan(t)}{2\left(\cos(t)\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin(t)\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\sqrt{2}}\right)$$

$$=\lim_{t\mapsto 0}\left(\frac{\left(1+\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)\tan(t)}{-\sqrt{2}(1-\cos(t))-\sqrt{2}\sin(t)}\right)=\lim_{t\mapsto 0}\left(\frac{\left(1+\tan\left(t+\frac{\pi}{4}\right)\right)\frac{\tan(t)}{t}}{-\sqrt{2}\,t\frac{(1-\cos(t))}{t^2}-\sqrt{2}\frac{\sin(t)}{t}}\right)$$

$$=\frac{(1+1)\times 1}{-\sqrt{2}\times 0\times\frac{1}{2}-\sqrt{2}\times 1}=-\sqrt{2}$$

لاحظ أن استعمال الخاصية $\tan(a-b)=\frac{\tan(a)-\tan(b)}{1+\tan(a)\tan(b)}$

بالشكل $\tan(a)-\tan(b)=(1+\tan(a)\tan(b))\tan(a-b)$ أفضل من استعمال تغيير المتغير من البداية.

$$\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{1-\cos(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{1-\tan(x)}\right)=\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin(x)-\cos(x)}{(1+\tan(x))\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{1}{\sqrt{1-\cos(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}}\right)$$

$$=\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}\left(\sin(x)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-\cos(x)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}{(1+\tan(x))\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{1}{\sqrt{1-\cos(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}}\right)$$

$$=\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}\times\frac{\sqrt{2}}{(1+\tan(x))\left(\sqrt{1-\cos(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)}\right)$$

وبما أن : $$\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}{\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}=\lim_{t\mapsto 0}\frac{\sin(t)}{\tan(t)}=\lim_{t\mapsto 0}\frac{\frac{\sin(t)}{t}}{\frac{\tan(t)}{t}}=\frac{1}{1}=1$$

و $$\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{2}}{(1+\tan(x))\left(\sqrt{1-\cos(x)}+\sqrt{1-\sin(x)}\right)}\right)=\frac{\sqrt{2}}{(1+1)\left(\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}+\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}}=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}$$

فإن : $$\lim_{x\mapsto\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\sqrt{1-\cos(x)}-\sqrt{1-\sin(x)}}{1-\tan(x)}\right)=\frac{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{4}$$

تمرين4 : $f_a(x)=\frac{1}{x+a}-\frac{a^2x^2}{x^3+a^3}$

1) لدينا: $x\neq -a \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq -a \\ x^3\neq(-a)^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+a\neq 0 \\ x^3+a^3\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in Df_a$ منه $Df_a=IR_{\setminus\{-a\}}$

2) لدينا : $f_a(x)=\frac{1}{x+a}-\frac{a^2x^2}{x^3+a^3}=\frac{x^2-ax+a^2}{x^3+a^3}-\frac{a^2x^2}{x^3+a^3}=\frac{(1-a^2)x^2-ax+a^2}{x^3+a^3}$

نضع : $g_a(x)=(1-a^2)x^2-ax+a^2$ ، إذن : $g_a(-a)=(1-a^2)a^2+a^2+a^2=3a^2-a^4=a^2(3-a^2)$

- إذا كان : $a=0$ فإن: $f_0(x)=\frac{x^2}{x^3}=\frac{1}{x}$ منه : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x>0}} f_0(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 0\\ x<0}} f_0(x)=-\infty$

- إذا كان : $a^2<3$ و $a\neq 0$ (أي $a\in\left]-\sqrt{3};0\right[\cup\left]0;\sqrt{3}\right[$) فإن: $g_a(-a)>0$
  منه : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto -a\\ x>-a}} f_a(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto -a\\ x<-a}} f_a(x)=-\infty$

- إذا كان : $a^2>3$ و (أي $a\in\left]-\infty;-\sqrt{3}\right[\cup\left]\sqrt{3};+\infty\right[$) فإن: $g_a(-a)<0$
  منه : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto -a\\ x>-a}} f_a(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto -a\\ x<-a}} f_a(x)=+\infty$

- إذا كان : $a=\sqrt{3}$ فإن: $g_a(-\sqrt{3})=0$ ، منه :

$$\lim_{x\mapsto-\sqrt{3}} f_{\sqrt{3}}(x)=\lim_{x\mapsto-\sqrt{3}}\frac{-2x^2-\sqrt{3}x+3}{x^3+(\sqrt{3})^3}=\lim_{x\mapsto-\sqrt{3}}\frac{(x+\sqrt{3})(\sqrt{3}-2x)}{(x+\sqrt{3})(x^2-x\sqrt{3}+3)}=\lim_{x\mapsto-\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}-2x}{x^2-x\sqrt{3}+3}=\frac{3\sqrt{3}}{9}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

- إذا كان : $a=-\sqrt{3}$ فإن: $g_a(\sqrt{3})=0$ ، منه :

$$\lim_{x\mapsto\sqrt{3}} f_{\sqrt{3}}(x)=\lim_{x\mapsto\sqrt{3}}\frac{-2x^2+\sqrt{3}x+3}{x^3-(\sqrt{3})^3}=\lim_{x\mapsto\sqrt{3}}\frac{(x-\sqrt{3})(-\sqrt{3}-2x)}{(x-\sqrt{3})(x^2+x\sqrt{3}+3)}=\lim_{x\mapsto\sqrt{3}}\frac{-\sqrt{3}-2x}{x^2+x\sqrt{3}+3}=\frac{-3\sqrt{3}}{9}=\frac{-\sqrt{3}}{3}$$

خلاصة : القيم التي تجيب عن السؤال هي : $a=\sqrt{3}$ و $a=-\sqrt{3}$

استعملنا المحددة للتعميل

تمرين 5 : $f(x)=\dfrac{mx^3+(m-2)x^2+(m-1)x+m-3}{x(x-2)(x-3)}$

1) لدينا: $x\neq 0 \;\; et \;\; x-2\neq 0 \;\; et \;\; x-3\neq 0 \Leftrightarrow x\in Df$ ، إذن : $Df=IR_{\backslash\{0;2;3\}}$

2) ندرس النهاية في اللانهاية :

- إذاكان $m=0$ فإن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{-2x^2-x-3}{x(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{-2x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{-2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=0$
- إذاكان $m\neq 0$ فإن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{mx^2}{x^3}=m$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=m$

يمكن أن نلخص الحالات في النتيجة التالية ، $\forall m\in IR \quad \lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=m$

نضع: $g(x)=mx^3+(m-2)x^2+(m-1)x+m-3$

$g(0)=m-3$ و $g(2)=8m+4(m-2)+2(m-1)+m-3=15m-13$

و $g(3)=27m+9(m-2)+3(m-1)+m-3=40m-24$

ندرس النهاية في 0 :

- إذاكان $m=3$ فإن : $\lim\limits_{x\mapsto0} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto0}\dfrac{3x^3+x^2+2x}{x(x-2)(x-3)}=\lim\limits_{x\mapsto0}\dfrac{3x^2+x+2}{(x-2)(x-3)}=\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$
- إذاكان $m>3$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto0\\x>0}} f(x)=+\infty \left(\dfrac{\ell>0}{0^+}\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto0\\x<0}} f(x)=-\infty \left(\dfrac{\ell>0}{0^-}\right)$
- إذاكان $m<3$ فإن : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto0\\x>0}} f(x)=-\infty \left(\dfrac{\ell<0}{0^+}\right)$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto0\\x<0}} f(x)=+\infty \left(\dfrac{\ell<0}{0^-}\right)$

تمرين 6 : $f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2}$

1) لدينا: $x\in Df \Leftrightarrow \begin{cases}4-x^2\neq 0\\ x+2\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 2 \;\; et \;\; x\neq -2\\ x\geq -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 2\\ x>-2\end{cases} \Leftrightarrow x\in\left]-2;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

إذن : $Df=\left]-2;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

2) إذاكان $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{x^2\left(\sqrt{x+2}-\dfrac{8}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{4}{x^2}-1\right)}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{\sqrt{x+2}-\dfrac{8}{x^2}}{\dfrac{4}{x^2}-1}=-\infty$

3) $\lim\limits_{x\mapsto2} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto2}\dfrac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2}=\lim\limits_{x\mapsto2}\dfrac{x^2\left(\sqrt{x+2}-2\right)+2x^2-8}{4-x^2}=\lim\limits_{x\mapsto2}\dfrac{x^2\dfrac{x+2-4}{\sqrt{x+2}+2}+2(x^2-4)}{4-x^2}$

$=\lim\limits_{x\mapsto2}\dfrac{x^2\dfrac{x-2}{\sqrt{x+2}+2}}{4-x^2}-2=\lim\limits_{x\mapsto2}\dfrac{-x^2}{(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}-2=\dfrac{-4}{16}-2=\dfrac{-9}{4}$

إذن f تقبل تمديدا بالاتصال في 2 تمديده هو : $\begin{cases}f(x)=\dfrac{x^2\sqrt{x+2}-8}{4-x^2}; \;\; x\in\left]-2;2\right[\cup\left]2;+\infty\right[\\ f(2)=\dfrac{9}{4}\end{cases}$

سلسلة 2	النهايات و الاتصال	السنة 2 بكالوريا علوم رياضية

تمرين 1 : نعتبر الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}$

1- حدد D_f حيز تعريف الدالة ثم ادرس زوجيتها.

2-تحقق أن : $\forall x\in Df \quad f(x)=-1+\dfrac{4}{1+x^2}$

3- بين أن f تناقصية قطعا على $[0;+\infty[$ ثم ضع جدول تغيراتها

4- احسب $f([0,1])$ و $f(]2,3])$ و $f(]-2,0[)$ و $f(]-\infty,-1[)$ و $f(]1,+\infty[)$ و $f([-3,2])$

تمرين 2 : نعتبر الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=x^3-3x+1$

حدد صور المجالات : $I=[0;+\infty[$ و $J=[0;1[$ و $K=]-\infty;0[$

تمرين 3 : f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ حيث $\forall x\in[a,b] \quad f(x)>1$

بين أن : $\exists\alpha>1 \ / \ \forall x\in[a,b] \quad f(x)\geq\alpha$

تمرين 4 :

1. بين أن المعادلة : $x^5+x^3-x^2+x+1=0$ تقبل على الأقل حلا في $[-1;0]$
2. بين أن المعادلة : $3\sin(x)+\cos^2(x)=x$ تقبل على الأقل حلا في $[0;\pi]$
3. بين أن المعادلة : $x^3+\dfrac{1}{x}=3$ تقبل على الأقل حلا في $[-2;2]$
4. بين أن المعادلة : $x^3+3x-10=0$ تقبل حلا وحيدا في IR
5. نعتبر الدالة $f(x)=x^4+x-1$ بين أن C_f منحنى الدالة f يقطع محور الأفاصيل في المجال $[-1;1]$
6. نعتبر الدالتين $f(x)=\sqrt{x+1}$ و $g(x)=-x^3$

بين أن C_f و C_g يتقاطعان في نقطة وحيدة أفصولها α يحقق : $\dfrac{-7}{8}<\alpha<\dfrac{-3}{4}$

تمرين 5 : لتكن f دالة متصلة على $[0;1]$ بحيث : $f(0)=0$ و $f(1)=1$

بين أن : $\exists c\in]0;1[\ : \ f(c)=\dfrac{1-c}{1+c}$

تمرين 6 : لتكن f دالة متصلة و موجبة على $[0;+\infty[$ حيث $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\ell$ و $\ell<1$

بين أن المعادلـــة $f(x)=x$ تقبل على الأقل حلا في $[0;+\infty[$

تمرين 2 : $f(x)=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}$

1) لدينا : $x\in D_f \Leftrightarrow x^2+1\neq 0$ منه : $D_f=I\!R$

لدينا : $x\in I\!R \Rightarrow -x\in I\!R$ و $f(-x)=\dfrac{3-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}=f(x)$ $\forall x\in I\!R$ ، بالتالي f دالة زوجية.

2) لدينا : $\forall x\in Df \quad -1+\dfrac{4}{1+x^2}=\dfrac{-1-x^2+4}{1+x^2}=\dfrac{3-x^2}{1+x^2}=f(x)$

3) ليكن : $(a,b)\in[0;+\infty[^2$ ، لدينا :

$$a>b\Rightarrow a^2>b^2\Rightarrow 1+a^2>1+b^2\Rightarrow \frac{1}{1+a^2}<\frac{1}{1+b^2}$$
$$\Rightarrow \frac{4}{1+a^2}<\frac{4}{1+b^2}\Rightarrow -1+\frac{4}{1+a^2}<-1+\frac{4}{1+b^2}\Rightarrow f(a)<f(b)$$

إذن f تناقصية قطعا على $[0;+\infty[$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	-1 ↗	3	↘ -1

حساب النهايات في المحدات ليس مطلوبا لكنه مفيد في السؤال الموالي

4) لنحسب :

$$f([0;1])=[f(1),f(0)]=[1;3]$$

$$f(]2,3])=\left[f(3),\lim_{x\mapsto 2}f(x)\right[=\left[\frac{-3}{5};\frac{-1}{5}\right[$$

$$f(]-2,0[)=\left]\lim_{x\mapsto -2}f(x),\lim_{x\mapsto 0}f(x)\right[=\left]\frac{-1}{5},3\right[$$

$$f(]-\infty,-1[)=\left]\lim_{x\mapsto -\infty}f(x),\lim_{x\mapsto 1}f(x)\right[=]-1,1[$$

$$f(]1,+\infty[)=\left]\lim_{x\mapsto +\infty}f(x),\lim_{x\mapsto 1}f(x)\right[=]-1,1[$$

$$f([-3;2])=f([-3;0]\cup[0;2])=f([-3;0])\cup f([0;2])=[f(-3);f(0)]\cup[f(2);f(0)]$$
$$=\left[\frac{-3}{5};3\right]\cup\left[\frac{-1}{5};3\right]=\left[\frac{-3}{5};3\right]$$

تمرين 2 : $f(x)=x^3-3x+1$

الدالة f دالة حدودية، فهي إذن قابلة للاشتقاق على IR

و لدينا: $\forall x\in IR \quad f'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

و بما أن: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto-\infty} x^3=-\infty$ فإن:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		-		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

إذن:

$$f([0;1[)=\left]\lim_{x\mapsto1} f(x),f(0)\right]=]-1,1]$$

$$f([1;+\infty[)=f([0,1]\cup[1;+\infty[)=f([0,1])\cup f([1;+\infty[)=[f(1),f(0)]\cup\left[f(1);\lim_{x\mapsto+\infty} f(x)\right[$$

$$=[-1,0]\cup[-1;+\infty[=[-1;+\infty[$$

$$f(]-\infty;0[)=f(]-\infty;-1]\cup[-1,0[)=f(]-\infty;-1])\cup f([-1,0[)=$$

$$=\left]\lim_{x\mapsto-\infty} f(x);f(-1)\right]\cup\left[\lim_{x\mapsto0} f(x),f(-1)\right[=]-\infty,3]\cup[1;3[=]-\infty,3]$$

لحساب صورة مجال بدالة متصلة، إذا كانت الدالة رتيبة على هذا المجال(تزايدية أو تناقصية) نطبق القواعد المعروفة و إذا كانت تغير رتابتها على هذا المجال فإننا نجعل هذا المجال على شكل اتحاد مجالات تكون في كل منها الدالة رتيبة و نطبق القاعدة في كل مجال على حدة.

تمرين 3 : f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ حيث $f(x)>1 \quad \forall x\in[a,b]$

لنبين أن : $\exists\alpha>1 \ / \ \forall x\in[a,b] \quad f(x)\geq\alpha$

بما أن f متصلة على $[a,b]$ فإنه يوجد $(m,M)\in IR^2$ حيث : $f([a,b])=[m,M]$

إذن : $\forall x\in[a,b] \quad f(x)\geq m$

بما أن : $m\in f([a,b])$ فإنه يوجد $x_0\in[a,b]$ حيث : $f(x_0)=m$

إذن : وبما أن : $\forall x\in[a,b] \quad f(x)>1$ فإن : $f(x_0)>1$ منه : $m>1$

إذن : $\exists m>1 \ / \ \forall x\in[a,b] \quad f(x)\geq m$ ، و هذا ينهي البرهان.

الخاصية المستعملة في حل التمرين قليلة الاستعمال في التمارين لكنها مهمة حيث تعتبر اللبنة الأساسية في البرهان على كثير من الخصائص في الدوال يمكن تلخيصها في الجملة : صورة مجال مغلق بدالة متصلة هو مجال مغلق.

تمرين 4 :

نعتبر الدالة $f(x)=x^5+x^3-x^2+x+1$ ، f هي دالة حدودية إذن فهي متصلة على IR و بالأخص على المجال $[-1;0]$ ، وبما أن: $f(-1)=-3<0$ و $f(0)=1>0$ ، فحسب مبرهنة القيم الوسيطة $\exists c\in[-1;0] \quad f(c)=0$ ، أي أن المعادلة $x^5+x^3-x^2+x+1=0$ تقبل على الأقل حلا في $[-1;0]$.

نعتبر الدالة $f(x)=3\sin(x)+\cos^2(x)-x$ ، f هي عبارة عن تأليفة لدوال حدودية و مثلثية إذن فهي متصلة

على $I\!R$ و بالأخص على المجال $[0;\pi]$ ، و بما أن: $f(0)=1>0$ و $f(\pi)=1-\pi<0$ ، فحسب مبرهنة القيم الوسيطة $\exists c\in[0;\pi]\ f(c)=0$ أي $\exists c\in[0;\pi]\ 3\sin(c)+\cos^2(c)-c=0$ أي $\exists c\in[0;\pi]\ 3\sin(c)+\cos^2(c)=c$

أي أن المعادلة $3\sin(x)+\cos^2(x)=x$ تقبل على الأقل حلا في $[0;\pi]$.

نعتبر الدالة $f(x)=x^3+\frac{1}{x}-3$ ، f هي عبارة عن دالة جذرية إذن فهي متصلة على مجموعة تعريفها $I\!R^*$ و بالأخص على المجال $[1;2]$ ، وبما أن: $f(1)=-1<0$ و $f(2)=\frac{11}{2}>0$ ، فحسب مبرهنة القيم الوسيطة $\exists c\in[1;2]\ f(c)=0$ ، وبما أن $c\in[1,2]\Rightarrow c\in[-2,2]$ فإن $\exists c\in[-2;2]\ f(c)=0$

أي أن المعادلة $x^3+\frac{1}{x}=3$ تقبل على الأقل حلا في $[-2;2]$.

نعتبر الدالة : $f(x)=x^3+3x-10$ ، f هي دالة حدودية إذن فهي متصلة على $I\!R$ وبالأخص على المجال $[0;2]$

ولدينا : $f(0)=-10<0$ و $f(2)=1>0$ ، إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة : $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $[0;2]$ بالتالي فهي تقبل على الأقل حلا في $I\!R$

وبما أن : $f'(x)=3x^2+3>0$ $\forall x\in I\!R$ فإن f دالة تزايدية قطعا.

بالتالي المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $I\!R$.

نعتبر الدالة : $f(x)=x^4+x-1$

الدالة f دالة حدودية فهي متصلة على $I\!R$ منه فهي متصلة على $[-1;1]$

ولدينا : $f(1)=1>0$ و $f(-1)=-1<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $[-1;1]$

وهذا يعني مبيانيا أن C_f منحنى الدالة f يقطع محور الأفاصيل في المجال $[-1;1]$

المعادلة $f(x)=g(x)$ تكافئ $f(x)-g(x)=0$

نعتبر الدالة : $h(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x+1}+x^3$

الدالة h عبارة عن جمع و مركب لدالة الجذر مربع و دوال حدودية فهي متصلة على $]-1;+\infty[$ منه فهي متصلة على $\left[\frac{-7}{8};\frac{-3}{4}\right]$ ، ولدينا : $h\left(\frac{-7}{8}\right)=\sqrt{\frac{-7}{8}+1}+\left(\frac{-7}{8}\right)^3=\sqrt{\frac{1}{8}}-\frac{343}{512}\approx-0{,}31<0$

و $h\left(\frac{-3}{4}\right)=\sqrt{\frac{-3}{4}+1}+\left(\frac{-3}{4}\right)^3=\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{27}{64}=\frac{1}{2}-\frac{27}{64}=\frac{32-27}{64}=\frac{5}{64}>0$

وبما أن : $h'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}+3x^2>0$ $\forall x\in]-1,+\infty[$ ، فإن h تزايدية قطعا على $\left[\frac{-7}{8};\frac{-3}{4}\right]$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة: $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في $\left[\frac{-7}{8};\frac{-3}{4}\right]$

وهذا يعني مبيانيا أن C_f و C_g يتقاطعان في نقطة وحيدة أفصولها α يحقق : $\frac{-7}{8}<\alpha<\frac{-3}{4}$

يجب الاحتياط أثناء استعما مبرهنة القيم الوسيطة حيث يجب التأكد من اتصال الدالة في المجال المطلوب أو البحث عن مجال ضمن المجال المطلوب يتحقق فيه الاتصال. وحدانية الحل مرتبطة برتابة الدالة في المجال المطلوب.

تمرين 5 : المعادلة $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ تكافئ $f(x)-\frac{1-x}{1+x}=0$ ، نعتبر الدالة : $g(x)=f(x)-\frac{1-x}{1+x}$

الدالة g هي فرق الدالة المتصلة f و الدالة الجذرية $x\rightarrow\frac{1-x}{1+x}$ إذن فهي متصلة على $[0;1]$

ولدينا : $g(0)=f(0)-1=0-1=-1<0$ و $g(1)=f(1)-0=1-0=1>0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فإن المعادلة: $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $]0;1[$

أي أن $\exists c\in]0;1[\quad : \quad f(c)=\frac{1-c}{1+c}$

صعوبة التمرين تكمن في اختيار الدالة و عدم خلطها بالدالة f المعطاة في التمرين ، كما يجب الانتباه للمجال المطلوب (مجال مفتوح) مما يتطلب التحقق أن طرفي المجال لا يحققان المعادلة المطلوبة.

تمرين 6 : لتكن f دالة متصلة و موجبة على IR^+ حيث $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell$ و $\ell<1$

لنبين أن المعادلـــة $f(x)=x$ تقبل على الأقل حلا في IR^+

لنبين أولا أن : $\exists c>0 \,/\, f(c)<c$

من أجل ذلك نفترض العكس أي نفترض أن $\forall x>0 \quad f(x)\geq x$ منه : $\frac{f(x)}{x}\geq1 \quad \forall x>0$

وبما أن $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{f(x)}{x}=\ell$ فإننا نستنتج أن $\ell\geq1$ وهذا يناقض المعطيات

إذن $\exists c>0 \,/\, f(c)<c$ ، الآن نعتبر الدالة $g(x)=f(x)-x$

لدينا : $g(0)=f(0)\geq0$ (f دالة موجبة) و $g(c)=f(c)-c<0$

وبما أن g دالة متصلة على IR^+ (لأنها فرق دالتين متصلتين) و بالأخص على $[0;c]$) فحسب مبرهنة القيم الوسيطة

فإن المعادلـــة $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $[0;c]$

بالتالي $f(x)=x$ تقبل على الأقل حلا في IR^+ (لأن $[0;c]\subset IR^+$)

يتطلب حل التمرين البرهان على وجود c يحقق الشرط $f(c)<c$ دون ضرورة تحديد قيمته، لأننا لا نتوفر على صيغة الدالة.

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	النهايات و الاتصال	سلسلة 3

تمرين 1 : نعتبر الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+8}}{x-1}+\dfrac{6|x|}{1-x^2}$

1- حدد D_f حيز تعريف الدالة .

2-احسب : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto -1} f(x)$

3-هل تقبل الدالة f تمديدا بالاتصال في 1

تمرين 2 :

1-بين أن المعادلة $x^3+x+1=0$ تقبل حلا على الأقل في $I\!R$

2-بين المعادلة $x^3+ax+b=0$ تقبل حلا على الأقل في $I\!R$ (حيث $(a,b)\in I\!R^2$)

تمرين 3 : نعتبر الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{x^2-a^2}$ حيث $a>0$

بين أن الدالة f تمديدا بالاتصال في a

تمرين 4 : احسب النهايات التالية :

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{E(x)}{x}$ ، $\lim\limits_{x\mapsto 0}\dfrac{E(x)}{x}$ ، $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} E(2x)+E(3x)$ ، $\lim\limits_{x\mapsto 0} E(2x)+E(3x)$

$\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{E(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1}$ ، $\lim\limits_{x\mapsto 2} E(3x)$ ، $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{E(2x)}{x-1}$ ، $\lim\limits_{x\mapsto-\infty}(x+3)\,E\left(\dfrac{1}{x}\right)$

تمرين 5 : نعتبر الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{|x^2-2x|-8}{x^2-5x+4}$

1- حدد D_f حيز تعريف الدالة .

2-احسب : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\mapsto 1} f(x)$

3-هل تقبل الدالة f تمديدا بالاتصال في 4

تمرين 6 : ليكن : $n\in I\!N^*$

احسب بدلالة n النهاية : $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{x+x^2+x^3+....+x^n-n}{(2-x)^n-1}$

تمرين 1 : $f(x)=\frac{\sqrt{x+8}}{x-1}+\frac{6|x|}{1-x^2}$

1) لدينا : $\begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -1 \\ x\geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\neq 0 \\ (1-x)(1+x)\neq 0 \\ x\geq -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\neq 0 \\ 1-x^2\neq 0 \\ x+8\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in D_f$ منه : $D_f=[-8;-1[\cup]-1;1[\cup]1;+\infty[$

2) لدينا : $\forall x>1\ f(x)=\sqrt{\frac{x+8}{(x-1)^2}}+\frac{6x}{1-x^2}$

وبما أن : $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{6x}{1-x^2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{6x}{-x^2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{-6}{x}=0$ و $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x+8}{(x-1)^2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{1}{x}=0$

فإن : $\boxed{\lim_{x\mapsto+\infty}f(x)=\sqrt{0}+0=0}$

هناك طرق أخرى، لكن يجب تعلم أبسط الطرق الممكنة وفق النهاية المطلوب حسابها

$$\boxed{\lim_{x\mapsto 0}f(x)=-\sqrt{8}}$$

نهاية بسيطة أدرجت بهدف التذكير بضرورة التعويض قبل أي محاولة أخرى

نعلم أن $1-x^2$ سالبة في المجال $]-1;1[$ وموجبة خارجه

وحيث أن : $\lim_{x\mapsto-1}\frac{\sqrt{x+8}}{x-1}=\frac{-\sqrt{7}}{2}$ و $\lim_{x\mapsto-1}6|x|=6$ فإن : $\boxed{(\ell+\frac{6}{0^-})\quad \lim_{\substack{x\mapsto-1\\x>-1}}f(x)=-\infty}$ و $\boxed{\lim_{\substack{x\mapsto-1\\x<-1}}f(x)=+\infty}$

التعويض بالرموز 0^+ و 0^- و $+\infty$ و $-\infty$ لا ننصح باستعمالها في الأجوبة خصوصا في الامتحان الوطني بل التعليل بمثل الطريقة أعلاه، لأنه مثلا الكتابة $\frac{6}{0^-}$ لامعنى لها رياضيا إنما هي طريقة لشرح الجواب و ليست جوابا بحد ذاته.

3) لدينا : $|x|=x$ $\forall x\in]0;2[$ ، إذن :

$$\lim_{x\mapsto1}f(x)=\lim_{x\mapsto1}\frac{\sqrt{x+8}}{x-1}+\frac{6x}{1-x^2}=\lim_{x\mapsto1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}+\frac{3}{x-1}-\frac{6x}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\mapsto1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}+\frac{3x+3-6x}{x^2-1}$$
$$=\lim_{x\mapsto1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}+\frac{3-3x}{x^2-1}=\lim_{x\mapsto1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}+\frac{-3}{x+1}$$
$$=\frac{1}{6}-\frac{3}{2}=\frac{-8}{6}=\frac{-4}{3}$$

إذن f تقبل تمديدا بالاتصال في 1

يمكننا دائما عند حساب نهاية دالة في عدد x_0 و عند الحاجة تعويض الدالة بقصورها في المجال $]x_0-a;x_0+b[$ حيث $a>0;\ b>0$

تمرين 2 :

1) نعتبر الدالة : $f(x)=x^3+x+1$

لدينا $f(0)=1>0$ و $f(-1)=-1<0$ و f متصلة على $[-1;0]$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة نستنتج أن $x^3+x+1=0$ تقبل على الأقل حلا في $[-1;0]$ و منه في $I\!R$

2) نعتبر الدالة : $g(x)=x^3+ax+b$

نعلم أن $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)=+\infty$ إذن حسب التعريف : $\forall A>0\ \exists x_0\in I\!R\ ;\ x\geq x_0 \Rightarrow g(x)>A$

نأخذ $A=1$ إذن : $\exists x_1\in I\!R\ ;\ x\geq x_1 \Rightarrow g(x)>1$ منه : $\exists x_1\in I\!R\ \ g(x_1)>1>0$

ونعلم أن $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)=-\infty$ إذن حسب التعريف : $\forall A<0\ \exists x_0\in I\!R\ ;\ x\leq x_0 \Rightarrow g(x)<A$

نأخذ $A=-1$ إذن : $\exists x_2\in I\!R\ ;\ x\leq x_2 \Rightarrow g(x)<-1$ منه : $\exists x_2\in I\!R\ \ g(x_2)<-1<0$

نضع : $a=Min(x_1;x_2)$ و $b=Max(x_1;x_2)$

الآن لدينا $f(x_1)>0$ و $f(x_2)<0$ منه : $f(a).f(b)<0$ و f متصلة على $[a;b]$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة فالمعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $[a;b]$ منه في $I\!R$

هناك طريقتان أخريتان على الأقل لحل التمرين أولاهما تعتمد على البرهان بالخلف مثل التمرين 6 من السلسلة 2 و الثانية تعتمد على دراسة تغيرات الدالة حسب قيم البارامتر a.

تمرين 3 : $f(x)=\dfrac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{x^2-a^2}$

لدينا :

$$\lim_{x\mapsto a} f(x)=\lim_{x\mapsto a}\frac{x\sqrt{x}-a\sqrt{a}}{x^2-a^2}=\lim_{x\mapsto a}\frac{x^3-a^3}{\left(x\sqrt{x}+a\sqrt{a}\right)\left(x^2-a^2\right)}=\lim_{x\mapsto a}\frac{x^2+ax+a^2}{\left(x\sqrt{x}+a\sqrt{a}\right)(x+a)}$$
$$=\frac{3a^2}{2a\sqrt{a}\times 2a}=\frac{3\sqrt{a}}{4a}$$

بالتالي الدالة f تمديدا بالاتصال في a

تمرين 4 :

- لدينا $\forall x>0\quad x-1<E(x)\leq x$ منه : $\forall x>0\quad 1-\dfrac{1}{x}<\dfrac{E(x)}{x}\leq 1$

  بما أن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1-\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 1=1$ فإن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\dfrac{E(x)}{x}=1$

- لدينا $\forall x\in[0;1[\quad E(x)=0$ منه : $\forall x\in]0;1[\quad \dfrac{E(x)}{x}=0$ منه : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto0\\x>0}}\dfrac{E(x)}{x}=0$

  و بما أن : $\forall x\in[-1;0[\quad E(x)=-1$ منه : $\forall x\in[-1;0[\quad \dfrac{E(x)}{x}=\dfrac{-1}{x}$ منه : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto0\\x<0}}\dfrac{E(x)}{x}=+\infty$

- لدينا $\forall x>0\quad 2x-1+3x-1<E(2x)+E(3x)\leq 2x+3x$ ، منه : $\forall x>0\quad E(2x)+E(3x)>5x-2$

  وبما أن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} 5x-2=+\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} E(2x)+E(3x)=+\infty$

- لدينا $x\in\left[0;\dfrac{1}{3}\right[\Rightarrow \begin{cases}0\leq 3x<1\\ 0\leq 2x<\dfrac{2}{3}<1\end{cases}$ إذن: $E(2x)+E(3x)=0\quad \in\left[0;\dfrac{1}{3}\right[$

  منه : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto0\\x>0}} E(2x)+E(3x)=0$

  و $x\in\left[-\dfrac{1}{3};0\right[\Rightarrow \begin{cases}-1\leq 3x<0\\ -1<\dfrac{-2}{3}\leq 2x<0\end{cases}$ إذن : $\forall x\in\left[-\dfrac{1}{3};0\right[\quad E(2x)+E(3x)=-2$

  منه : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto0\\x>-2}} E(2x)+E(3x)=-2$

▪ لدينا $\forall x>0 \quad \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}<E(\sqrt{x})\leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

وبما أن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{1-\frac{1}{\sqrt{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$ و $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}=1$ فإن : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{E(\sqrt{x})}{\sqrt{x}+1}=1$

▪ لدينا $\Rightarrow 6\leq 3x<7$ $x\in\left[2;2+\frac{1}{3}\right[$ إذن: $E(3x)=6$ $\forall x\in\left[2;\frac{7}{3}\right[$ منه : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\ x>2}} E(3x)=6$

و $\Rightarrow 5\leq 3x<6$ $x\in\left[2-\frac{1}{3};2\right[$ إذن: $E(3x)=5$ $\forall x\in\left[\frac{5}{3};2\right[$ منه : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 2\\ x<2}} E(3x)=5$

▪ لدينا $\Rightarrow 2\leq 2x<3$ $x\in\left[1;\frac{3}{2}\right[$ إذن: $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}} \frac{E(2x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}} \frac{2}{x-1}=+\infty$

و $\Rightarrow 1\leq 2x<2$ $x\in\left[\frac{1}{2};1\right[$ إذن: $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{E(2x)}{x-1}=\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} \frac{1}{x-1}=-\infty$

▪ نضع : $t=\frac{1}{x}$ منه : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} (x+3)\,E\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{t\mapsto 0\\ t<0}} \left(\frac{1}{t}+3\right)E(t)$

لدينا : $E(t)=-1$ $t\in[-1;0[$ منه : $\forall t\in[0;1[\quad \left(\frac{1}{t}+3\right)E(t)=-\left(\frac{1}{t}+3\right)$

منه $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} (x+3)\,E\left(\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{\substack{t\mapsto 0\\ t<0}} -\left(\frac{1}{t}+3\right)=+\infty$

- لاحظ الفرق الكبير بين الطريقتين في $+\infty$ و في الصفر عندما يتعلق الأمر بدالة الجزء الصحيح
- كما يجب أن تعلم أنه لا يمكننا التعويض ببساطة عندما يتعلق الأمر بنهاية لدالة الجزء الصحيح في عدد صحيح و السبب أن هذه الأخيرة غير متصلة في أي عدد صحيح، لذلك نلجأ إلى تديد قصورها في مجال مفتوح يتضمن العدد المراد حساب النهاية فيه أو يكون أحد طرفي المجال.
- دالة الجزء الصحيح من الدوال التي يصعب التعامل مع خواصها كان هذا التمرين محاولة لتوضيع بعض الطرق المستعملة لحساب نهايات تتضمن هذه الدالة.

تمرين 5 : $f(x)=\frac{|x^2-2x|-8}{x^2-5x+4}$

1) بعد حساب المحددة نجد : $Df=]-\infty;1[\cup]1;4[\cup]4;+\infty[$

2) لدينا : $\forall x>2 \quad x^2-2x=x(x-2)>0$

منه : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+4}\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{x^2}{x^2}=1$

و $\forall x<0 \quad x^2-2x=x(x-2)>0$ منه : $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{x^2}{x^2}=1$

وبما أن : $\lim\limits_{x\mapsto 1} |x^2-2x|-8=-7$ و $\lim\limits_{x\mapsto 1} x^2-5x+4=0$ و $x^2-5x+4=(x-1)(x-4)$

منه : $x<1 \Rightarrow x^2-5x+4>0$ و $1<x<4 \Rightarrow x^2-5x+4<0$

فإن : $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x>1}} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\mapsto 1\\ x<1}} f(x)=-\infty$

3) لدينا : $\forall x\in[3;5]\quad x^2-2x=x(x-2)>0$ إذن : $\lim\limits_{x\mapsto 4} f(x)=\lim\limits_{x\mapsto 4}\dfrac{x^2-2x-8}{x^2-5x+4}=\lim\limits_{x\mapsto 4}\dfrac{(x-4)(x+2)}{(x-1)(x-4)}=\dfrac{6}{3}=2$

إذن الدالة f تمديدا بالاتصال في 4

لاحظ أن دالة القيمة المطلقة أيضا يجب التعامل معها في أغلب الحالات في مجالات، لكنها عكس دال الجزء الصحيح متصلة على $I\!R$ لذلك يمكن التعويض فيها دائما.

تمرين 6 : $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{x+x^2+x^3+....+x^n-n}{(2-x)^n-1}$

الطريقة 1:

$$\lim_{x\mapsto 1}\frac{x+x^2+x^3+....+x^n-n}{(2-x)^n-1}=\lim_{x\mapsto 1}\frac{(x-1)+(x^2-1)+(x^3-1)+....+(x^n-1)}{(2-x-1)\left[(2-x)^{n-1}+(2-x)^{n-2}+...+1\right]}$$

$$=\lim_{x\mapsto 1}\frac{(x-1)\left[1+(x+1)+(x^2+x+1)+(x^3+x^2+x+1)....+(x^{n-1}+x^{n-2}.+..+1)\right]}{(1-x)\left[(2-x)^{n-1}+(2-x)^{n-2}+...+1\right]}$$

$$=\frac{1+2+3+...+n}{-n}=\frac{-\dfrac{n(n+1)}{2}}{n}=\frac{-(n+1)}{2}$$

الطريقة 2:

نضع : $f(x)=x+x^2+x^3+....+x^n$ و $g(x)=(2-x)^n$

إذن : $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{x+x^2+x^3+....+x^n-n}{(2-x)^n-1}=\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{g(x)-g(1)}=\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}}{\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}}$

بما أن f قابل للاشتقاق على $I\!R$ حيث : $\forall x\in I\!R\quad f'(x)=1+2x+3x^2+...+nx^{n-1}$

و g قابل للاشتقاق على $I\!R$ حيث : $\forall x\in I\!R\quad g'(x)=-n(2-x)^{n-1}$

إذن : $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=1+2+....+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

و أيضا : $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=-n$ بالتالي : $\lim\limits_{x\mapsto 1}\dfrac{x+x^2+x^3+....+x^n-n}{(2-x)^n-1}=\dfrac{-(n+1)}{2}$

الاشتقاق يكون مفيدا في تحديد نهايات كثيرة دون الحاج للتعميل أو استعمال طرق معقد أو طويلة.

السنة 2 بكالوريا علوم رياضية	النهايات و الاتصال	سلسلة 4

تمرين 1 : نعتبر الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^{3}$

1- حدد D_f حيز تعريف الدالة

2- ادرس رتابة الدالة f على حيز تعريفها باستعمال التعريف.

3- بين أن f تقابل من D_f نحو مجال J يجب تحديده.

4- احسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 2 : نعتبر الدالة المعرفة كما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

1- بين أن : $f(x)=\sqrt{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} \quad : \quad \forall x\in \left]-1;+\infty\right[$

2- بين أن f تقابل من $I\!R^{+}$ نحو مجال J يجب تحديده.

3- احسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 3 : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^{3}-x+1}-x\right) \qquad \lim_{x\mapsto 0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}\right) \qquad \lim_{x\mapsto -2^{-}}\left(\frac{\sqrt[3]{x^{2}-4}}{x+2}\right)$$

تمرين 4 : أتبث المتساويات التالية :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{4} \quad ، \quad \operatorname{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{2} \quad ، \quad \forall x<0 \quad \operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\pi}{2}$$

تمرين 5 : حل في $I\!R$ المعادلتين :

$$\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2x-1}\right)+\operatorname{Arctan}(x)=\frac{\pi}{2} \quad ، \quad \operatorname{Arctan}(2x)+\operatorname{Arctan}(3x)=\frac{\pi}{4}$$

تمرين 6 : احسب النهاية التالية : $\lim_{x\mapsto+\infty} x\left(Arctg(2x)-Arctg(x)\right)$

تمرين 1 : $f(x)=\left(\sqrt{x+1}-1\right)^3$

1 لدينا : $x\in D_f \Leftrightarrow x+1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq -1$ منه : $D_f=[-1;+\infty[$

2 ليكن $(x,y)\in[-1;+\infty[^2$ ، لدينا :

$$x>y \Rightarrow x+1>y+1\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x+1}>\sqrt{y+1}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1}-1>\sqrt{y+1}-1 \Rightarrow \left(\sqrt{x+1}-1\right)^3>\left(\sqrt{y+1}-1\right)^3$$
$$x>y \Rightarrow f(x)>f(y)$$

إذن f تزايدية قطعا على D_f

3 بما أن f متصلة و تزايدية قطعا على D_f

فهي تقابل من D_f نحو $J=f([-1;+\infty[)=\left[f(-1);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=[-1;+\infty[$

4 ليكن $x\in[-1;+\infty[$ و $y\in[-1;+\infty[$ ، لدينا : $f^{-1}(x)=y \Rightarrow f(y)=x \Rightarrow \left(\sqrt{y+1}-1\right)^3=x$

إذا كان $x\in[0;+\infty[$ فإن :

$$f^{-1}(x)=y \Rightarrow \sqrt{y+1}-1=\sqrt[3]{x} \Rightarrow \sqrt{y+1}=\sqrt[3]{x}+1$$
$$\Rightarrow y+1=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2 \Rightarrow y=\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^2-1=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}$$

إذا كان $x\in[-1;0[$ فإن :

$$f^{-1}(x)=y \Rightarrow \left(1-\sqrt{y+1}\right)^3=-x$$
$$\Rightarrow 1-\sqrt{y+1}=\sqrt[3]{-x} \Rightarrow \sqrt{y+1}=1-\sqrt[3]{-x}$$
$$\Rightarrow y+1=\left(1-\sqrt[3]{-x}\right)^2 \Rightarrow y=\left(1-\sqrt[3]{-x}\right)^2-1=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x}$$
$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x}$$

بالتالي:
$$\begin{cases} f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{-x} \ ; \ x\in[-1;0[\\ f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x} \ ; \ x\in[0;+\infty[\end{cases}$$

يبدو سؤالا سهلا في البداية، إذ أن عدم الانتباه أن دالة الجذر المكعب معرفة على $[0;+\infty[$ سيجعلنا نتسرع في تحديد صيغة الدالة العكسية دون مراعاة مجال التعريف.

تمرين 2 : $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$

1 لدينا : $\forall x\in]-1;+\infty[\ : \ \sqrt{x+1}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{x+1-1}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x}}=f(x)$

2 ليكن $(x,y)\in[0;+\infty[^2$ ، لدينا :

$$x>y \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}>\sqrt{y+1}>0 \\ \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}<\dfrac{1}{\sqrt{y+1}} \end{cases} \Rightarrow \ \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{x+1}>\sqrt{y+1}>0 \\ -\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}>-\dfrac{1}{\sqrt{y+1}} \end{cases}$$
$$\Rightarrow \sqrt{x+1}-\frac{1}{\sqrt{x+1}}>\sqrt{y+1}-\frac{1}{\sqrt{y+1}}$$
$$x>y \Rightarrow f(x)>f(y)$$

إذن f تزايدية قطعا على $[0;+\infty[$ ، و بما أنها متصلة عليه

فهي إذن تقابل من $[0;+\infty[$ نحو $J=f([0;+\infty[)=\left[f(0);\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[=[0;+\infty[$

ليكن $x\in[0;+\infty[$ و $y\in[0;+\infty[$ ، لدينا : $f^{-1}(x)=y \Rightarrow f(y)=x \Rightarrow \dfrac{y}{\sqrt{1+y}}=x$

$$\Rightarrow y^2=x^2(y+1)\Rightarrow y^2-x^2y-x^2=0$$

محددة الحدودية $y^2-x^2y-x^2=0$ ذات المجهول y هي : $\Delta=x^4+4x^2\geq 0$

إذن : $f^{-1}(x)=y \Rightarrow y=\dfrac{x^2+\sqrt{x^4+x^2}}{2}$ ou $y=\dfrac{x^2-\sqrt{x^4+x^2}}{2}$

3 وبما أن : $\dfrac{x^2+\sqrt{x^4+x^2}}{2}\geq 0$ $\forall x\in[0;+\infty[$ فإن : $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2+\sqrt{x^4+x^2}}{2}$ $\forall x\in[0;+\infty[$

لسنا مظطرين للبرهان ان $\dfrac{x^2-\sqrt{x^4+x^2}}{2}\notin[0;+\infty[$ $\forall x\in[0;+\infty[$ والسبب أننا نعلم مسبقا عن طريق الاتصال والرتابة وحدانية تعبير الدالة العكسية ، لذلك أي تعبير سنجده يحقق الشروط سيكون تلقائيا هو التعبير المبحوث عنه والوحيد. لكننا في السنة الأولى بكالوريا لم نكن نكتفي بهذا الأمر والسبب أننا لم نكن نتوفر على خاصية تسمح مسبقا بضمان وجود الدالة العكسية.

تمرين 3 : احسب النهايات التالية :

$$\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\sqrt[3]{8x^3-x+1}-x\right)=\lim_{x\mapsto+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3\left(8-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}-x\right)=\lim_{x\mapsto+\infty}x\left(\sqrt[3]{8-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}}-1\right)=+\infty$$

$(+\infty\times(2-1)\ \ )$

$$\lim_{x\mapsto0}\left(\frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}\right)=\lim_{x\mapsto0}\frac{x+1-1}{x\left(\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1\right)}=\lim_{x\mapsto0}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x+1}\right)^2+\sqrt[3]{x+1}+1}=\frac{1}{3}$$

$$\lim_{x\mapsto-2^-}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{x+2}\right)=\lim_{x\mapsto-2^-}\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{-(-x-2)}=\lim_{x\mapsto-2^-}\frac{\sqrt[3]{x^2-4}}{-\sqrt[3]{(-x-2)^3}}=\lim_{x\mapsto-2^-}-\sqrt[3]{\frac{(x-2)(x+2)}{-(x+2)^3}}=\lim_{x\mapsto-2^-}-\sqrt[3]{\frac{2-x}{(x+2)^2}}=-\infty$$

استعمال الخاصية $\sqrt[3]{a\times b}=\sqrt[3]{a}\times\sqrt[3]{b}$ ممكن لكن به مخاطرة حيث يجب أن يكون a و b موجبين، لكن $x^2-4=(x+2)(x-2)$ هو جذاء عددين سالبين ، لذلك يتوجب كتابتهما على شكل $x^2-4=(-x-2)(-x+2)$

تمرين 4 : أتبث المتساويات التالية :

لنبين أن : $\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)=\frac{\pi}{4}$ ، نضع : $a=\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)+\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)$

لدينا ، $\begin{cases}0<\frac{1}{5}<1\\0<\frac{2}{3}<1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0<\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)<\frac{\pi}{4}\\0<\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)<\frac{\pi}{4}\end{cases}\Rightarrow 0<a<\frac{\pi}{2}$

و $\tan(a)=\dfrac{\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right)+\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}{1-\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{5}\right)\right).\tan\left(\text{Arctan}\left(\frac{2}{3}\right)\right)}=\dfrac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{15}}=\dfrac{\frac{13}{15}}{\frac{13}{15}}=1$ ، إذن : $\begin{cases}\left(a,\frac{\pi}{4}\right)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\\\tan(a)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=1\end{cases}\Rightarrow a=\frac{\pi}{4}$

لاحظ جيدا شروط البرهان على المتساوية، فلا يكفي البرهان أن $\tan(a)=\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)$ بل يجب البرهان قبل ذلك أنهما ينتميان معا لمجال من الشكل : $\left]\frac{-\pi}{2}+k\pi;\frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ حيث تكون فيه دالة قوس الظل تقابلا.

لنبين أن : $\mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{2}$

لدينا : $\mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)$

نضع : $a=\mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)$ و $b=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)$

لدينا : $\frac{4}{3}>0 \Rightarrow 0<\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}<-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<0 \Rightarrow 0<\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{2}$

و أيضا : $0<\mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)<\frac{\pi}{2}$

ولدينا : $\tan(b)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)\right)=\dfrac{1}{\tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)\right)}=\dfrac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}=\tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{3}{4}\right)\right)$

إذن : $\begin{cases}(a,b)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[^2\\ \tan(a)=\tan(b)\end{cases} \Rightarrow a=b$ ، و هذا ينهي البرهان

لم نكن مظطرين لحصر $\frac{4}{3}$ لأننا نعلم مسبقا أن : $\forall x\in I\!R \;\; \frac{-\pi}{2}<\mathrm{Arctan}\,x<\frac{\pi}{2}$

لنبين أن : $\forall x<0 \quad \mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\pi}{2}$

لدينا : $\mathrm{Arctan}(x)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\pi}{2} \Leftrightarrow \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)$

نضع : $a=\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)$ و $b=\frac{-\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)$

لدينا : $x<0 \Rightarrow \frac{-\pi}{2}<\mathrm{Arctan}(x)<0 \Rightarrow 0<-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2}<\frac{-\pi}{2}-\mathrm{Arctan}\left(\frac{4}{3}\right)<0$

و أيضا : $-\frac{\pi}{2}<\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)<0$ ، ولدينا :

$$\tan(b)=\tan\left(\frac{-\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)\right)=\tan\left(\frac{-\pi}{2}+\pi-\mathrm{Arctan}(x)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)\right)=\frac{1}{\tan(\mathrm{Arctan}(x))}=\frac{1}{x}$$

إذن : $\begin{cases}(a,b)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[^2\\ \tan(a)=\tan(b)\end{cases} \Rightarrow a=b$ ، و هذا ينهي البرهان

استعملنا الخاصية : $\tan(x)=\tan(x+k\pi)\,/\,k\in Z$

تمرين 5 :

نرمز لمعادلة المقترحة ب: $(E):\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2x-1}\right)+\mathrm{Arctan}(x)=\frac{\pi}{2}$ ، مجموعة صلاحيتها هي : $D=I\!R-\left\{\frac{1}{2}\right\}$

لدينا :

$$(E)\Rightarrow \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2x-1}\right)=\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x) \Rightarrow \tan\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{2x-1}\right)\right)=\tan\left(\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)\right)$$

$$(E) \Rightarrow \frac{1}{2x-1}=\frac{1}{\tan(\mathrm{Arctan}(x))}=\frac{1}{x}\Rightarrow 2x-1=x\Rightarrow x=1$$

عكسيا يمكن التحقق بسهولة من أن 1 حل لهذه المعادلة ، بالتالي : $S=\{1\}$

ليس من الضروري البرهان أن $\frac{\pi}{2}-\mathrm{Arctan}(x)\in\left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ و السبب أنه من خلال المعادلة التي هي معطاة يساوي تعبيرا نعلم

مسبقا أنه ينتمي لهذا المجال، فالأمر مختلف عن التمرين السابق لأننا لسنا بصدد البرهان على هذه المتساوية، بل نستعملها و نقوم باستنتاجات.

$$\operatorname{Arctan}(2x)+\operatorname{Arctan}(3x)=\frac{\pi}{4} \Rightarrow \tan(\operatorname{Arctan}(2x)+\operatorname{Arctan}(3x))=1$$

$$\Rightarrow \frac{2x+3x}{1-6x^2}=1 \Rightarrow 5x=1-6x^2$$

$$\Rightarrow 6x^2+5x-1=0$$

$$\Rightarrow x=-1 \ \ ou \ \ x=\frac{1}{6}$$

عكسيا نتحقق أن $\frac{1}{6}$ هو العدد الوحيد الذي يحقق هذه المعادلة (لأن: $\operatorname{Arctan}(-2)+\operatorname{Arctan}(-3)<0$ و $\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{3}\right)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{4}$ نبرهن عليها كما في السؤال الأول من التمرين السابق)

خلاصة : $S=\left\{\frac{1}{6}\right\}$

استعملنا المحددة لتحديد حلول المعادلة $6x^2+5x-1=0$

تمرين 6 : لنحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} x(Arctg(2x)-Arctg(x))$

نضع: $t=\frac{1}{x}$ ، إذن:

$$\lim_{x\mapsto+\infty} x(\operatorname{Arctan}(2x)-\operatorname{Arctan}(x))=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{2}{t}\right)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right)}{t}=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\frac{\pi}{2}-\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)-\frac{\pi}{2}+\operatorname{Arctan}(t)}{t}$$

$$=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\operatorname{Arctan}(t)-\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)}{t}=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}-\frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)}{t}$$

$$=\lim_{\substack{t\mapsto0\\t>0}}\frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t}-\frac{1}{2}\frac{\operatorname{Arctan}\left(\frac{t}{2}\right)}{\frac{t}{2}}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

استعملنا المتساوية : $\operatorname{Arctan}(x)+\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{\pi}{2}$ $\forall x>0$ والتي يمكن استعمالها في حال لم تكن كسؤال فرعي مساعد، وأيضا النهاية الهامة : $\lim\limits_{x\mapsto0}\frac{\operatorname{Arctan}(x)}{x}=1$ والتي يمكن البرهان عنها بسهولة باستعمال تغيير المتغير $\operatorname{Arctan}(x)=t$

الإتصال

تمرين1

نعتبر الدالة : $f(x)=\dfrac{2x^2-7x+6}{-2x^2+5x-2}$

1- حدد النهايات عند محدات f

2- ادرس اتصال f على D_f

3- هل الدالة f تقبل تمديدا بالإتصال في : 2 ; $\frac{1}{2}$ ؟

الحل

1- $D_f=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[\cup\left]\frac{1}{2};2\right[\cup\left]2;+\infty\right[$

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=-1 \qquad \lim_{x\to 2} f(x)=-\frac{1}{3}$$

$$f(x)=\frac{2x-3}{-2x+1} \qquad x\neq 2$$

x	$1/2$
$-2x+1$	+ 0 −

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=\frac{-2}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=\frac{-2}{0^-}=+\infty$$

تمرين2

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{2x-1}-1}{x-1} & x\geq\frac{1}{2};x\neq 1 \\ f(1)=1 \end{cases}$$

بين أن f متصلة في 1 .

الحل

المرافق

تمرين3

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x+2}{x^3+8} & x<-2 \\ f(-2)=\dfrac{1}{12} \\ f(x)=\dfrac{1}{x^2-2x+4} & x>-2 \end{cases}$$

بين أن f متصلة في -2.

الحل

التعميل

تمرين4

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-3}$$

بين أن f تقبل تمديدا بالإتصال في : 3 ثم عرفه

الحل

$$D_f=[2;3[\cup]3;+\infty[$$

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2}-3}$$

$$=\frac{\left(\sqrt{2x+3}-3\right)-\left(\sqrt{x+1}-2\right)}{\left(\sqrt{x+1}-2\right)+\left(\sqrt{x-2}-1\right)}$$

$$=\frac{\dfrac{2}{\sqrt{2x+3}+3}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}+2}+\dfrac{1}{\sqrt{x-2}+1}}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 3} f(x)=\frac{1}{9}}$$

إذن : f تقبل تمديدا بالإتصال في 3

نعتبر: $\begin{cases} g(x)=f(x) & x\in D_f \\ g(3)=\dfrac{1}{9} \end{cases}$

g هي تمديد f بالاتصال في 3

تمرين5

$$n\in\mathbb{N}^* ;\ f(x)=\frac{(1+x)^n-1}{x}$$

بين أن f تقبل تمديدا بالإتصال في : 0 ثم عرفه

الحل

$$a^n-b^n=(a-b)\left(a^{n-1}+a^{n-2}b^1+\cdots+a^1b^{n-2}+b^{n-1}\right)$$

نعتبر : $a=1+x \quad ; \quad b=1$

$$(1+x)^n-1=x\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}+\cdots+(1+x)+1\right)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}(x+1)^k=n$$

تمرين6

$$f(x)=\frac{x^2}{x-2}$$

حدد : D_f ؛ $f(D_f)$

الحل

$$f'(x)=\frac{x(x-4)}{x-2}$$

f تناقصية على : $[0;2[\cup]2;4]$

f تزايدية على : $]-\infty;0]\cup[4;+\infty[$

$$f(D_f)=f\left([0;2[\cup]2;4]\right)\cup f\left(]-\infty;0]\cup[4;+\infty[\right)$$

$$f(D_f)=f\left([0;2[\cup]2;4]\right)\cup f\left(]-\infty;0]\cup[4;+\infty[\right)$$

$\boxed{f\left(D_f\right)=\left]-\infty;0\right]\cup\left[8;+\infty\right[}$

تـمـريــن 7

f و g دالتين متصلتين على مجال $[a;b]$

بحيث : $\forall x\in[a;b]: f(x)>g(x)$

بين أن :

$$\left(\exists\lambda\in\mathbb{R}^{*+}\right)\left(\forall x\in[a;b]\right): f(x)\geq g(x)+\lambda$$

الحل

نعتبر : $h(x)=f(x)-g(x)\ \ ;\ \ x\in[a;b]$

بما أن : f و g دالتان متصلتان على $[a;b]$

فإن : h متصلة على $[a;b]$

$\boxed{\text{إذن : } h \text{ محدودة على } [a;b]}$

ومنه : $\left(\exists\alpha;\beta\in[a;b]\right) / h\left([a;b]\right)=\left[h(\alpha);h(\beta)\right]$

إذن : $\left(\forall x\in[a;b]\right): h(x)\geq h(\alpha)\quad (1)$

بما أن : $\forall x\in[a;b]: f(x)>g(x)$

فإن : $\forall x\in[a;b]: h(x)>0$

إذن : $h(\alpha)>0$

نعتبر: $h(\alpha)=\lambda$ إذن : $\lambda\in\mathbb{R}^{*+}$

من : (1)

$$\left(\exists\lambda\in\mathbb{R}^{*+}\right)\left(\forall x\in[a;b]\right): h(x)\geq\lambda$$

إذن : $\left(\exists\lambda\in\mathbb{R}^{*+}\right)\left(\forall x\in[a;b]\right): f(x)-g(x)\geq\lambda$

و منه : $\left(\exists\lambda\in\mathbb{R}^{*+}\right)\left(\forall x\in[a;b]\right): f(x)\geq g(x)+\lambda$

تمرين8

-1 $f(x)=x^3-2x^2-1$

بين أن $f(x)=2$ لها حل وحيد على $[2;3]$

-2 $f(x)=2x^3-5$

بين أن $f(x)=0$ لها حل على $[-1;3]$

الحل

-1 f متصلة تزايدية قطعا على $[2;3]$

و $f([2;3])=[-1;8]$ و $2\in[-1;8]$

إذن : $f(x)=2$ لها حل وحيد على $[2;3]$

-2 f متصلة على $[-1;3]$ و $f(-1)\times f(3)\leq 0$

إذن : حسب مبرهنة القيمة الوسيطية $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $[-1;3]$

تـمـريــن 9

f متصلة على $[a;b]$ بحيث $f(a)<ab$ و $f(b)>b^2$.

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $]a;b[$ بحيث

$f(c)=bc$

الحل

أ- نعتبر : $g(x)=f(x)-bx$ بحيث $x\in[a;b]$

بما أن f متصلة على $[a;b]$

فإن g متصلة على $[a;b]$ أ

لدينا : $g(a)=f(a)-ab$ و $f(a)<ab$

إذن : $g(a)<0$

لدينا : $g(b)=f(b)-b^2$ و $f(b)>b^2$

إذن : $g(b)>0$

و منه : $g(a)g(b)<0$ ب

و من أ و ب : و حسب مبرهنة القيمة الوسيطية المعادلة $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا في $[a;b]$

إذن : يوجد عدد حقيقي c من $[a;b]$ بحيث $g(c)=0$

يعني : : يوجد عدد حقيقي c من $[a;b]$ بحيث $f(c)=bc$

تمرين10

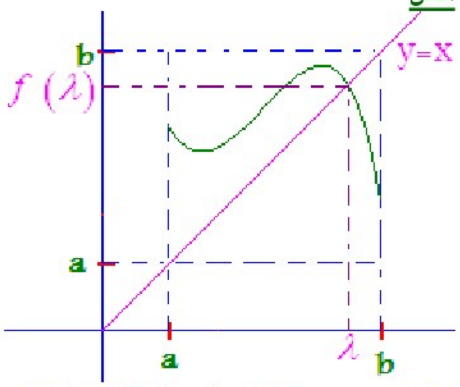
f دالة متصلة على مجال $[a;b]$ بحيث :

$f([a;b])\subset[a;b]$

بين أن : $\exists\lambda\in[a;b] / f(\lambda)=\lambda$

(قبل البرهنة ارسم شكلا موضحا ذلك)

الحل



إذا كان : $f(a)=a$ أو $f(b)=b$ فالمطلوب تحقق

نفترض أن : $f(a)\neq a$ و $f(b)\neq b$

بما أن : $f([a;b])\subset[a;b]$

فإن : $a<f(a)$ و $f(b)<b$

نعتبر : $g(x)=f(x)-x$ بحيث $x\in[a;b]$

بما أن : f دالة متصلة على $[a;b]$

فإن : g دالة متصلة على $[a;b]$

$g(a)>0$ و $g(b)<0$

حسب مبرهنة القيمة الوسيطية $g(x)=0$ تقبل على الأقل حلا على $[a;b]$

إذن : $\exists\lambda\in[a;b] \,/\, f(\lambda)=\lambda$

تمرين11 (التمرين 84 ص 43 المفيد في الرياضيات)

f دالة عددية متصلة من $\mathbb{R}$ نحو : $]-\infty;1[$

$0<a<b$

g دالة عددية متصلة على $\mathbb{R}$:

بحيث : $f(a)=a\,;g(b)=b$ ؛ $(\forall x\in\mathbb{R})\ g(x)>1$

بين أن : $\exists x_0\in]a;b[\ /\ g(x_0)f(x_0)=x_0$

الحل

$f(a)\in]-\infty;1[$ إذن : $f(a)<1$

و $g(a)>1$ لأن $(\forall x\in\mathbb{R})\ g(x)>1$

نعتبر : $h(x)=f(x)g(x)-x$

$h(a)=a(g(a)-1)$ إذن : $h(a)>0$

$h(b)=b(f(a)-1)$ إذن : $h(b)<0$

حسب مبرهنة القيمة الوسيطية $h(x)=0$ تقبل على الأقل حلا على $[a;b]$

إذن : $\exists x_0\in]a;b[\ /\ g(x_0)f(x_0)=x_0$

تمرين12

احسب :

-1 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{36x^2+x}+6x$

-2 $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2+1}$

-3 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3x+5}}{\sqrt{x+4}-2}$

-4 $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}$

-5 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x$

-6 $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x$

الحل

-1 بما أن x تؤول إلى $-\infty$ نعتبر :

$x<0$ إذن : $\sqrt{x^2}=|x|=-x$

$$A=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{36x^2+x}+6x$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{36x^2+x-36x^2}{\sqrt{36x^2+x}-6x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{\sqrt{36x^2+x}-6x}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{-x\left(\sqrt{36+\frac{1}{x}}+6\right)}$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\left(\sqrt{36+\frac{1}{x}}+6\right)}$$
$$=-\frac{1}{12}$$

إذن :
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty}\sqrt{36x^2+x}+6x=-\frac{1}{12}}$$

-2 $\lim\limits_{x\to+\infty}x-\sqrt{x^2+1}$ نفس طريقة 1

-3
$$A=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3x+5}}{\sqrt{x+4}-2}$$
$$=\lim_{x\to0}\frac{(x+5-3x-5)\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{(x+4-2)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+5}\right)}$$
$$A=\lim_{x\to0}\frac{-2x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{(x+2)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+5}\right)}$$
$$A=\lim_{x\to0}\frac{-2x\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+5}\right)}$$
$$A=\lim_{x\to0}\frac{-2\left(\sqrt{x+4}+2\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)\left(\sqrt{x+5}+\sqrt{3x+5}\right)}$$
$$A=\lim_{x\to0}\frac{-2\left(\sqrt{4}+2\right)}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}\right)}$$
$$A=-\frac{4}{\sqrt{5}}$$

إذن :
$$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{x+5}-\sqrt{3x+5}}{\sqrt{x+4}-2}=-\frac{4}{\sqrt{5}}}$$

4- المرافق ثم التعميل ب $x-2$ أو وضع $t=x-2$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-1)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}{4\left(x+\sqrt{x+2}\right)}=\frac{3}{8}$$

-5

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+\sqrt{\frac{1}{x^3}+\sqrt{\frac{1}{x^7}}}}-1\right)$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-x=-\infty}$$

-6 $\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-x+1}-x=+\infty$ مباشرة

تمرين13

$$f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

1 - بين أن : $f(\mathbb{R})\subset]-1;1[$

2 - احسب : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

3 - استنتج : $f(\mathbb{R})$

الحل

-1 $\forall x\in\mathbb{R}$

$$x^2<x^2+1\Leftrightarrow|x|<\sqrt{x^2+1}\Leftrightarrow\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right|<1$$

إذن : $|f(x)|<1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

و منه : $f(\mathbb{R})\subset]-1;1[$

2 - $\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$

3 – f متصلة و $\mathbb{R}$ مفتوح

إذن : $f(\mathbb{R})$ مفتوح

بما أن : f فردية و $|f(x)|<1 \quad \forall x\in\mathbb{R}$

فإن : $\exists\alpha\in]0;1]$ بحيث : $f(\mathbb{R})=]-\alpha;\alpha[$

إذن : $f(x)<\alpha \quad \forall x\in\mathbb{R}$

و منه : $\lim_{x\to+\infty}f(x)\le\alpha$ إذن : $1\le\alpha$

إذن : $\alpha=1$

و منه : $\boxed{f(\mathbb{R})=]-1;1[}$

تمرين14

$$n\in\mathbb{N}^*-\{1\};\ f(x)=x^{n+1}-3x^n+2$$

1- أ- بين أن : f تناقصية على $\left[0;\frac{3n}{n+1}\right]$

ب- استنتج أن : $f\left(\frac{3n}{n+1}\right)<0$

2- بين أن : $\exists\alpha\in\left[\frac{3n}{n+1};3\right]/f(\alpha)=0$

الحل

-1

أ- $n\in\mathbb{N}^*-\{1\};\ f(x)=x^{n+1}-3x^n+2$

$$f(x)=x^{n-1}\left((n+1)x-3n\right)$$

إذن : f تناقصية على $\left[0;\frac{3n}{n+1}\right]$

ب- لدينا : $1\in\left[0;\frac{3n}{n+1}\right]$ لأن $n>1$

و بما أن : f تناقصية قطعا على $\left[0;\frac{3n}{n+1}\right]$

فإن : $f\left(\frac{3n}{n+1}\right)<f(1)$

و لدينا : $f(1)=0$

إذن : $f\left(\frac{3n}{n+1}\right)<0$

2- لدينا : $f(3)>0$ و $f\left(\frac{3n}{n+1}\right)<0$

حسب مبرهنة القيمة الوسيطية $f(x)=0$ تقبل على الأقل حلا على $\left[\frac{3n}{n+1};3\right]$

إذن : $\exists\alpha\in\left[\frac{3n}{n+1};3\right]/f(\alpha)=0$