الأعداد العقدية

السلسلة 1 (6 تمارين)

التمين 1:

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$ ، لتكن t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{w}$ التي لحقها $z_{\vec{w}}=\left(2-\sqrt{2}\right)+i\left(2-\sqrt{6}\right)$. نعتبر النقطة A التي لحقها $a=\sqrt{2}+i\sqrt{6}$

1) **اعط الكتابة العقدية للإزاحة t**
2) **حدد b لحق النقطة B صورة النقطة A بالإزاحة t**
3) **نضع $c=\frac{a}{b}$. أكتب a و b و c على شكلها المثلثي**
4) **أكتب العدد c على شكله الجبري**
5) **استنتج القيم المضبوطة ل $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$**
6) **أكتب c^{2007} على الشكل الجبري.**

التمرين 2:

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$. (الوحدة $1cm$). نعتبر النقط A و B و S و Ω التي ألحاقها على التوالي : $a=-2+4i$ و $b=-4+2i$ و $s=-5+5i$ و $\omega=-2+2i$
و ليكن h التحاكي الذي مركزه S و نسبته 3
و لتكن C صورة A بالتحاكي h و D صورة B بالتحاكي h

1) **أ. اعط الكتابة العقدية للتحاكي h**
   ب. بين أن $c=4+2i$ هو لحق النقطة C و أن $d=-2-4i$ هو لحق النقطة D
   ج. بين أن النقط A و B و C و D متداورة
2) **لتكن P منتصف القطعة $[AC]$**
   أ. حدد p لحق النقطة P
   ب. بين أن $\frac{\omega-p}{b-d}=\frac{1}{2}i$ و استنتج أن $DB=2P\Omega$ و أن $\left(\overline{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{P\Omega}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

التمرين 3:

1) **حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+8=0$**
2) **في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي :**
   $z_A=2+2i$ و $z_B=2-2i$ و $z_C=4$
   أ. حدد معيار و عمدة كل من العددين العقديين z_A و z_B

Moutamadris.ma

ب.بين أن المثلث OAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في O
ج.بين أن الرباعي $OBCA$ مربع
د.لتكن E منتصف القطعة $[OA]$ و لتكن D نقطة لحقها z_D حيث $z_D = iz_A$
بين أن E هي منتصف القطعة $[CD]$

التمرين 4:

نعتبر المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{u},\vec{v})$.

1) أ. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $a=2$ و $b=3+i\sqrt{3}$ و $c=2i\sqrt{3}$. حدد قياسا للزاوية $A\widehat{B}C$

ب. استنتج ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هو $1+i\sqrt{3}$

2) نرمز ب (z_n) المتتالية المعرفة ب : $\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2} z_n + 2 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$

و نضع A_n النقطة التي لحقها z_n

أ. بين أن النقط A_2 و A_3 و A_4 هي النقط التي ألحاقها على التوالي $3+i\sqrt{3}$ و $2+2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$
لاحظ أن $A_1 = A$ و $A_2 = B$ و $A_4 = C$

ب. قارن أطوال القطع $[A_1A_2]$ و $[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$

ج. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1} - \omega = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$

د. استنتج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يتم تحديد طبيعته و عناصره المميزة

ه. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6} = A_n$ ثم حدد لحق A_{2012}

و. حدد طول القطعة $[A_nA_{n+1}]$

التمرين 5:

I. نعتبر العدد العقدي $U = 2+\sqrt{3}+i$

1. بين أن معيار العدد U هو $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

2. تحقق من أن $U = 2\left(1+\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right) + i\,2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$

3. أ) بإخطاط $\cos^2(\theta)$ بين أن : $1+\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$

ب) بين أن $U = 4\cos^2\left(\dfrac{\pi}{12}\right) + 4i\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (نذكر أن $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$)
ثم أكتب العدد U على شكله المثلثي

ج) بين أن : $U^6 = \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6 i$

Moutamadris.ma

II. نعتبر في المستوى العقدي النقطتين Ω و P اللذين لحقاهما $\omega=\sqrt{3}$ و U
و ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2

1. بين أن d لحق النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هو $\left(4+\sqrt{3}\right)+2i$
2. حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $\left|z-4-\sqrt{3}-2i\right|=\left|U\right|$

التمرين 6:

المستوى العقديمنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

و لتكن A و B النقطتين اللتسن لحقاهما $a=i$ و $b=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$

1. ليكن r الدوران الذي مركزه O و زاويته $\frac{2\pi}{3}$ و لتكن C صورة B بالدوران r
   أ) اعط الكتابة العقدية للدوران r ثم أكتب c لحق النقطة C على شكله الأسي
   ب) أكتب كلا من b و c على الشكل الجبري
2. لتكن D مرجح النقط المتزنة $\left(A,2\right)$ و $\left(B,-1\right)$ و $\left(C,2\right)$
   أ) حدد d لحق النقطة D
   ب) بين أن النقط A و B و C و D متداورة
3. ليكن h التحاكي الذي مركزه A و نسبته 2 و لتكن E صورة النقطة D بالتحاكي h
   اعط الكتابة العقدية للتحاكي h ثم حدد e لحق النقطة E
4. أ) أحسب $\frac{d-c}{e-c}$ و أكتبها على شكلها الأسي
   ب) استنتج طبيعة المثلث CDE

Moutamadris.ma

تصحيح التمرين 1

1. الكتابة العقدية للإزاحة t

لتكن $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ بالإزاحة t

$$t(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'}=\vec{w}$$
$$\Leftrightarrow z'-z=z_{\vec{w}}$$
$$\Leftrightarrow z'=z+z_{\vec{w}}$$
$$\Leftrightarrow z'=z+\left(2-\sqrt{2}\right)+i\left(2-\sqrt{6}\right)$$

2.
$$b=a+\left(2-\sqrt{2}\right)+i\left(2-\sqrt{6}\right)$$
$$b=\sqrt{2}+i\sqrt{6}+2-\sqrt{2}+2i-\sqrt{6}i$$
$$b=2+2i$$

3.
$$a=\sqrt{2}+i\sqrt{6}=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$$
$$b=2+2i=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

لدينا :
$$c=\frac{a}{b}=\frac{2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)}$$

إذن :
$$c=\frac{2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

و منه :
$$c=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

Moutamadris.ma

$$c = e^{-i\frac{\pi}{6}}$$
$$= \cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)$$
$$= \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}$$

2. أ) $d = \frac{(2)a + (-1)b + (2)c}{(2)+(-1)+(2)} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$

ب) (بعد الحساب) نجد $\frac{c-a}{b-a} \times \frac{b-d}{c-d} = 2 \in \mathbb{R}$ إذن النقط A و B و C و D متداورة

3.

✓

$$z' - a = 2(z - a)$$
$$z' - i = 2(z - i)$$
$$z' = 2z - i$$

✓

$$e = 2d - i$$
$$e = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) - i$$
$$e = \sqrt{3}$$

4. أ) $\frac{d-c}{e-c} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = 1.e^{i\frac{\pi}{3}}$

ب)

✓ بما أن : $\left|\frac{d-c}{e-c}\right| = 1$ فإن : $CD = CE$

✓ و بما أن $\arg\left(\frac{d-c}{e-c}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ فإن : $\left(\overline{\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

و بلتالي المثلث CDE متساوي الأضلاع

Moutamadris.ma

.4

$$\begin{aligned} c &= \frac{a}{b} \\ &= \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2+2i} \\ &= \frac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{6}\right)(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} \\ &= \frac{2\sqrt{2}-2i\sqrt{2}+2i\sqrt{6}+2\sqrt{6}}{8} \\ &= \left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \end{aligned}$$

.5 لدينا : $\begin{cases} c=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ c=\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)+i\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\right) \end{cases}$ إذن : $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

.6

$$\begin{aligned} c^{2007} &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)^{2007} \\ &= \cos\left(\frac{2007\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{2007\pi}{12}\right) \\ &= \cos\left(\frac{-3\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{-3\pi}{4}\right) \\ &= \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)-i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) \\ &\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)-i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right) \\ &= -\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

(لاحظ أن : $\frac{2007\pi}{12}=\frac{-9\pi+2016\pi}{12}=\frac{-9\pi}{12}+168\pi=\frac{-3\pi}{4}+2(84)\pi$)

Moutamadris.ma

تصحيح التمرين 2

1. أ) لتكن $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ بالتحاكي h الذي مركزه S و نسبته 3

$$h(M)=M' \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{SM'}=3\overrightarrow{SM}$$
$$\Leftrightarrow z'-s=3(z-s)$$
$$\Leftrightarrow z'=3z+10-10i$$

ب) لدينا : $C(c)$ هي صورة النقطة $A(a)$ بالتحاكي h إذن :

$$c=3a+10-10i$$
$$c=3(-2+4i)+10-10i$$
$$c=4+2i$$

و لدينا : $D(d)$ هي صورة النقطة $B(b)$ بالتحاكي h إذن :

$$d=3b+10-10i$$
$$d=3(-4+2i)+10-10i$$
$$c=-2-4i$$

ج)

$$\frac{c-a}{b-a}\times\frac{b-d}{c-d}=\frac{(4+2i)-(-2+4i)}{(-4+2i)-(-2+4i)}\times\frac{(-4+2i)-(-2-4i)}{(4+2i)-(-2-4i)}$$
$$=\frac{6-2i}{-2-2i}\times\frac{-2+6i}{6+6i}$$
$$=\frac{-12+36i+4i+12}{-12-12i-12i+12}$$
$$=\frac{40i}{-24i}$$
$$=\frac{-5}{3}$$

بما أن $\frac{c-a}{b-a}\times\frac{b-d}{c-d}\in\mathbb{R}$ فإن النقط A و B و C و D متداورة

2. أ) لدينا : $p=\frac{a+c}{2}=\frac{-2+4i+4+2i}{2}=1+3i$

ب)

✓

Moutamadris.ma

$$\frac{\omega-p}{b-d}=\frac{(-2+2i)-(1+3i)}{(-4+2i)-(-2-4i)}$$
$$=\frac{-3-i}{-2+6i}$$
$$=\frac{i(-1+3i)}{2(-1+3i)}$$
$$=\frac{1}{2}i$$
$$=\frac{1}{2}e^{i\frac{\pi}{2}}$$

✓ لدينا : $\left|\frac{\omega-p}{b-d}\right|=\frac{1}{2}$ إذن $\frac{P\Omega}{DB}=\frac{1}{2}$ و منه $DB=2P\Omega$

✓ و لدينا : $\arg\left(\frac{\omega-p}{b-d}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{DB},\overrightarrow{P\Omega}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

تصحيح التمرين 3

1. لنحل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2-4z+8=0$

لدينا : $\Delta=(-4)^2-4(1)(8)=-16$

بما أن $\Delta<0$ فإن المعادلة تقبل حلين عقديين مترافقين :

$$z=\frac{-(-4)-i\sqrt{16}}{2(1)} \text{ أو } z=\frac{-(-4)+i\sqrt{16}}{2(1)}$$

إذن : $z=2-2i$ أو $z=2+2i$

و منه : $S=\{2-2i,2+2i\}$

2. أ.

✓ $|z_A|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$z_A=2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$ و منه : $\arg(z_A)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

✓ $|z_B|=|\overline{z_A}|=|z_A|=2\sqrt{2}$

Moutamadris.ma

$$\begin{aligned}\arg(z_B) &\equiv \arg\left(\overline{z_A}\right)[2\pi]\\ &\equiv -\arg(z_A)[2\pi]\\ &\equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]\end{aligned}$$

ب. لدينا : $\frac{z_A}{z_B}=\frac{2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{2\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}}=1.e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)}=1.e^{i\frac{\pi}{2}}$

إذن : $\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}=1.e^{i\frac{\pi}{2}}$

✓ لدينا : $\left|\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}\right|=1$ إذن : $\frac{OA}{OB}=1$ و منه $OA=OB$

✓ و لدينا : $\arg\left(\frac{z_A-z_O}{z_B-z_O}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$ إذن : $\left(\overline{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

و بلتالي المثلث OAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في O

ج. لدينا : $z_C-z_A=2-2i$ و $z_B-z_O=2-2i$

إذن $z_C-z_A=z_B-z_O$ و منه $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OB}$ و بالتالي الرباعي $OBCA$ متوازي أضلاع

و بما أن $\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{OB}$ فإن $OBCA$ مستطيل

و بما أن $OA=OB$ فإن $OBCA$ مربع.

د. لدينا : $z_E=\frac{z_O+z_A}{2}=\frac{0+2+2i}{2}=1+i$ و $z_D=iz_A=i(2+2i)=-2+2i$

$$\frac{z_C+z_D}{2}=\frac{4-2+2i}{2}=1+i$$

بما أن : $\frac{z_C+z_D}{2}=z_E$ فإن E منتصف $[CD]$

Moutamadris.ma

تصحيح التمرين 4

1. أ) لدينا :

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{2i\sqrt{3}-3-i\sqrt{3}}{2-3-i\sqrt{3}} = \frac{-3+i\sqrt{3}}{-1-i\sqrt{3}} = \frac{-i\sqrt{3}\left(-1-i\sqrt{3}\right)}{-1-i\sqrt{3}} = -i\sqrt{3} = \sqrt{3}e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)}$$

إذن :

$$\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)[2\pi] \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$$

ب) بما أن المثلث ABC قائم الزاوية في B فإن $[AC]$ يمثل قطر الدائرة المحاطة بالمثلث ABC

إذن Ω مركز هذه الدائرة هو منتصف القطعة $[AC]$ أي : $\omega = \frac{a+c}{2} = \frac{2+2i\sqrt{3}}{2} = 1+i\sqrt{3}$

2. أ)

✓ $z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_0 + 2 = 2$

✓ $z_2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_1 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}a + 2 = 3+i\sqrt{3} = b$

✓ $z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_2 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}b + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(3+i\sqrt{3}\right) + 2 = 2+2i\sqrt{3}$

✓ $z_4 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_3 + 2 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(2+2i\sqrt{3}\right) + 2 = 2i\sqrt{3} = c$

ب) $A_1A_2 = |z_2 - z_1| = 2 \quad A_2A_3 = |z_3 - z_2| = 2 \quad A_3A_4 = |z_4 - z_3| = 2$

إذن : $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$

ج) ليكن $n \in \mathbb{N}$:

$$z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 2 - 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 1 - i\sqrt{3} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n - \left(1+i\sqrt{3}\right)\right) = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}\left(z_n - \omega\right)$$

Moutamadris.ma

د) بما أن $z_{n+1}-\omega=e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_n-\omega\right)$ فإن A_{n+1} هي صورة A_n بلدوران R الذي مركزه Ω و زاويته $\frac{\pi}{3}$

ه)

✓ نضع $v_n=z_n-\omega$

لدينا $\left(v_n\right)$ هندسية أساسها $e^{i\frac{\pi}{3}}$ و حدها الأول $v_0=-\omega$ إذن : $v_n=-\omega\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^n=-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}$

و منه $z_n=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}$

إذن : $z_{n+6}=\omega-\omega e^{\frac{i(n+6)\pi}{3}}=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}e^{i2\pi}=\omega-\omega e^{\frac{in\pi}{3}}=z_n$

✓ $z_{2012}=z_{2+6(335)}=z_2=3+i\sqrt{3}$

و) نضع $d_n=A_nA_{n+1}=\left|z_{n+1}-z_n\right|$

بحساب d_{n+1} نجد $d_{n+1}=d_n$ إذن $\left(d_n\right)$ ثابتة و منه $d_n=d_1=A_1A_2=2$ أي : $A_nA_{n+1}=2$

(يمكنك كذلك استعمال خاصيات الدوران كطريقة أخرى)

تصحيح التمرين 5

I. 1) $|U|=\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{8+4\sqrt{3}}=2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

2) $U=2+\sqrt{3}+i=2\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+i.2.\frac{1}{2}=2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+i.2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3) أ)

$$\cos^2(\theta)=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2$$
$$=\frac{e^{2i\theta}+2e^{i\theta}e^{-i\theta}+e^{-2i\theta}}{4}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+1+e^{-2i\theta}}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{e^{2i\theta}+e^{-2i\theta}}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(2\theta)+1\right)$$

و منه : $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$

Moutamadris.ma

ب)

$$U = 2\left(1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)+i.2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= 2\left(1+\cos\left(2.\frac{\pi}{12}\right)\right)+i.2\sin\left(2.\frac{\pi}{12}\right)$$
$$= 2\times 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+i.2\times 2\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$
$$= 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)+i.4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

بما أن $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)>0$ فإن الشكل المثلثي للعدد U هو :

$$U = 4\cos\left(\frac{\pi}{12}\right).\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

ج)

$$U^6 = \left(|U|.\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)\right)^6$$
$$= |U|^6.\left(\cos\left(\frac{6\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{6\pi}{12}\right)\right)$$
$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6.\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$$
$$= \left(2\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^6.i$$

II. 1)

$$d-\omega = 2(p-\omega)$$
$$d = 2p-2\omega+\omega$$
$$d = 2p-\omega$$
$$d = 2\left(2+\sqrt{3}+i\right)-\sqrt{3}$$
$$d = \left(4+\sqrt{3}\right)+2i$$

1) لدينا : $\left|z-4-\sqrt{3}-2i\right| = |U|$ تكافئ $|z-d| = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

Moutamadris.ma

إذن مجموعة النقط M هي الدائرة التي مركزها D و شعاعها $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$

تصحيح التمرين 6

1. أ)

✓ $$z'-z_O=e^{i\frac{2\pi}{3}}.(z-z_O)$$

$$z'-0=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).(z-0)$$

$$z'=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).z$$

✓ لدينا : $C(c)$ صورة $B(b)$ بالدوران r :

إذن : $c=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times b$

إذن : $c=e^{i\frac{2\pi}{3}}\times e^{i\frac{-5\pi}{6}}$ و منه : $c=e^{-i\frac{\pi}{6}}$

ب)

✓

$$b=e^{-i\frac{5\pi}{6}}$$

$$=\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{-\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}$$

✓

Moutamadris.ma

تمارين محلولة الأعداد العقدية - الجزء الأول

تمرين 1

1) أعط الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية التالية:

$z_1 = \frac{1+i}{1-i}$ ، $z_2 = \frac{2-3i}{3+2i}$ ، $z_3 = \frac{1+2i}{2-3i} + \frac{2-3i}{3+2i}$

2) حدد مجموعة النقط من المستوى التي تحقق:

$|z_1 - 1| = |z_1 - i|$ ، $|z_2 - 1| = |z_2 + 1|$ ، $|z_3 - 1| = |z_3 - i|$

3) حدد مجموعة النقط من المستوى التي تحقق:

$\arg(z_1) = \frac{\pi}{4}$ ، $\arg(z_2) = \frac{\pi}{2}$ ، $\arg(z_3) = \frac{\pi}{4}$

الحل المقترح

1) أعط الشكل الجبري لكل من الأعداد العقدية التالية:

$z_1 = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{1^2+1^2} = \frac{1+2i+i^2}{2} = \frac{2i}{2} = i$

$z_2 = \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{(2-3i)^2}{3^2+2^2} = \frac{4-12i+9i^2}{13} = \frac{-5-12i}{13}$

$z_3 = \frac{1+2i}{2-3i} + \frac{2-3i}{3+2i} = \frac{2+9i+6i^2}{4+9} = \frac{-4+9i}{13}$

2) حدد مجموعة النقط من المستوى التي تحقق:

$|z_1 - 1| = |z_1 - i| \Leftrightarrow |i - 1| = |i - i| \Leftrightarrow \sqrt{2} = 0$ خاطئة

$|z_2 - 1| = |z_2 + 1| \Leftrightarrow |-5-12i - 13| = |-5-12i + 13| \Leftrightarrow |-18-12i| = |8-12i| \Leftrightarrow \sqrt{468} = \sqrt{208}$ خاطئة

$|z_3 - 1| = |z_3 - i| \Leftrightarrow |-4+9i - 13| = |-4+9i - 13i| \Leftrightarrow |-17+9i| = |-4-4i| \Leftrightarrow \sqrt{370} = \sqrt{32}$ خاطئة

3) حدد مجموعة النقط من المستوى التي تحقق:

$\arg(z_1) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arg(i) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$ خاطئة

$\arg(z_2) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{-5-12i}{13}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arg(-5-12i) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi = \frac{\pi}{2}$ خاطئة

$\arg(z_3) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{-4+9i}{13}\right) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi = \frac{\pi}{4}$ خاطئة

تمرين 2

1) أحسب $|z_1|$ و $|z_2|$ و $|z_3|$ في المجال المثلثي.

2) أكتب z_1 و z_2 و z_3 على الشكل المثلثي.

3) أكتب $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ و z_3^2 على الشكل المثلثي.

4) أكتب z_1^{2013} و z_2^{2013} و z_3^{2013} على الشكل الجبري.

الحل المقترح

1) أحسب $|z_1|$ و $|z_2|$ و $|z_3|$ في المجال المثلثي.

$|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{-5}{13}\right)^2 + \left(\frac{-12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{169}} = 1$

$|z_3| = \sqrt{\left(\frac{-4}{13}\right)^2 + \left(\frac{9}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{97}{169}}$

2) أكتب z_1 و z_2 و z_3 على الشكل المثلثي.

$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = \left(\frac{-5}{13} + i\frac{-12}{13}\right) = \left(\cos\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi + i\sin\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi\right)$

$z_3 = \sqrt{\frac{97}{169}}\left(\frac{-4}{\sqrt{97}} + i\frac{9}{\sqrt{97}}\right) = \sqrt{\frac{97}{169}}\left(\cos\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi + i\sin\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi\right)$

3) أكتب $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ و z_3^2 على الشكل المثلثي.

$z_1 z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{12}{5}\right) + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{12}{5}\right) + \pi\right)\right)$

$z_3^2 = \sqrt{\frac{97}{169}}\left(\cos\left(2\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi\right) + i\sin\left(2\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi\right)\right)$

4) أكتب z_1^{2013} و z_2^{2013} و z_3^{2013} على الشكل الجبري.

$z_1^{2013} = \sqrt{2}^{2013}\left(\cos\left(\frac{2013\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2013\pi}{4}\right)\right) = 2^{1006}(1+i)$

$z_2^{2013} = \left(\cos\left(2013\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - 2013\pi\right) + i\sin\left(2013\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - 2013\pi\right)\right)$

$z_3^{2013} = \sqrt{\frac{97}{169}}^{2013}\left(\cos\left(2013\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - 2013\pi\right) + i\sin\left(2013\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - 2013\pi\right)\right)$

تمرين 3

1) أحسب $|z_1|$ و $|z_2|$ و $|z_3|$ في المجال المثلثي.

2) أكتب z_1 و z_2 و z_3 على الشكل المثلثي.

3) أكتب $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ و z_3^2 على الشكل المثلثي.

4) أكتب z_1^{2013} و z_2^{2013} و z_3^{2013} على الشكل الجبري.

الحل المقترح

1) أحسب $|z_1|$ و $|z_2|$ و $|z_3|$ في المجال المثلثي.

$|z_1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$

$|z_2| = \sqrt{\left(\frac{-5}{13}\right)^2 + \left(\frac{-12}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{169}} = 1$

$|z_3| = \sqrt{\left(\frac{-4}{13}\right)^2 + \left(\frac{9}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{97}{169}}$

2) أكتب z_1 و z_2 و z_3 على الشكل المثلثي.

$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = \left(\frac{-5}{13} + i\frac{-12}{13}\right) = \left(\cos\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi + i\sin\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi\right)$

$z_3 = \sqrt{\frac{97}{169}}\left(\frac{-4}{\sqrt{97}} + i\frac{9}{\sqrt{97}}\right) = \sqrt{\frac{97}{169}}\left(\cos\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi + i\sin\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi\right)$

3) أكتب $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ و z_3^2 على الشكل المثلثي.

$z_1 z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{12}{5}\right) + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{12}{5}\right) + \pi\right)\right)$

$z_3^2 = \sqrt{\frac{97}{169}}\left(\cos\left(2\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi\right) + i\sin\left(2\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi\right)\right)$

4) أكتب z_1^{2013} و z_2^{2013} و z_3^{2013} على الشكل الجبري.

$z_1^{2013} = \sqrt{2}^{2013}\left(\cos\left(\frac{2013\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2013\pi}{4}\right)\right) = 2^{1006}(1+i)$

$z_2^{2013} = \left(\cos\left(2013\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - 2013\pi\right) + i\sin\left(2013\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - 2013\pi\right)\right)$

$z_3^{2013} = \sqrt{\frac{97}{169}}^{2013}\left(\cos\left(2013\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - 2013\pi\right) + i\sin\left(2013\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - 2013\pi\right)\right)$

تمرين 4

1) أحسب $z_1 + z_2 + z_3$ و $z_1 z_2 z_3$ و $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$ و $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$ و $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_1}$

2) أكتب z_1 و z_2 و z_3 على الشكل المثلثي.

3) أكتب $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ و z_3^2 على الشكل المثلثي.

4) أكتب z_1^{2013} و z_2^{2013} و z_3^{2013} على الشكل الجبري.

الحل المقترح

1) أحسب $z_1 + z_2 + z_3$ و $z_1 z_2 z_3$ و $\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3}$ و $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}$ و $\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_1}$

$z_1 + z_2 + z_3 = 1 + \frac{-5}{13} + i\frac{-12}{13} + \frac{-4}{13} + i\frac{9}{13} = 1 + \frac{-17}{13} + i\frac{-3}{13} = \frac{4}{13} - i\frac{3}{13}$

$z_1 z_2 z_3 = 1 \cdot \left(\frac{-5}{13} + i\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{-4}{13} + i\frac{9}{13}\right) = \frac{-8}{13} + i\frac{-3}{13}$

$\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = 1 + \frac{1}{\left(\frac{-5}{13} + i\frac{-12}{13}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{-4}{13} + i\frac{9}{13}\right)} = 1 + \frac{13}{-5-12i} + \frac{13}{-4+9i} = 1 + \frac{13(-5+12i)}{169} + \frac{13(-4-9i)}{97} = 1 + \frac{-65+156i}{169} + \frac{-52-117i}{97} = 1 + \frac{-8-3i}{13} = \frac{5}{13} - i\frac{3}{13}$

$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = \frac{1}{\left(\frac{-5}{13} + i\frac{-12}{13}\right)} + \frac{\left(\frac{-5}{13} + i\frac{-12}{13}\right)}{\left(\frac{-4}{13} + i\frac{9}{13}\right)} + \frac{\left(\frac{-4}{13} + i\frac{9}{13}\right)}{1} = \frac{13}{-5-12i} + \frac{(-5-12i)(-4-9i)}{169} + \frac{-4+9i}{13} = \frac{13(-5+12i)}{169} + \frac{20-45i+48i-108}{169} + \frac{-4+9i}{13} = \frac{-65+156i}{169} + \frac{-88+3i}{169} + \frac{-52+117i}{169} = \frac{-205+276i}{169}$

$\frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{z_2}{z_3} \cdot \frac{z_3}{z_1} = \frac{1}{\left(\frac{-5}{13} + i\frac{-12}{13}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{-5}{13} + i\frac{-12}{13}\right)}{\left(\frac{-4}{13} + i\frac{9}{13}\right)} \cdot \frac{\left(\frac{-4}{13} + i\frac{9}{13}\right)}{1} = \frac{13}{-5-12i} \cdot \frac{(-5-12i)(-4-9i)}{169} \cdot \frac{-4+9i}{13} = \frac{13(-5+12i)}{169} \cdot \frac{20-45i+48i-108}{169} \cdot \frac{-4+9i}{13} = \frac{-65+156i}{169} \cdot \frac{-88+3i}{169} \cdot \frac{-4+9i}{13} = \frac{-205+276i}{169}$

2) أكتب z_1 و z_2 و z_3 على الشكل المثلثي.

$z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = \left(\frac{-5}{13} + i\frac{-12}{13}\right) = \left(\cos\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi + i\sin\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi\right)$

$z_3 = \sqrt{\frac{97}{169}}\left(\frac{-4}{\sqrt{97}} + i\frac{9}{\sqrt{97}}\right) = \sqrt{\frac{97}{169}}\left(\cos\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi + i\sin\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi\right)$

3) أكتب $z_1 z_2$ و $\frac{z_1}{z_2}$ و z_3^2 على الشكل المثلثي.

$z_1 z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi + \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - \pi + \frac{\pi}{4}\right)\right)$

$\frac{z_1}{z_2} = \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{12}{5}\right) + \pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \arctan\left(\frac{12}{5}\right) + \pi\right)\right)$

$z_3^2 = \sqrt{\frac{97}{169}}\left(\cos\left(2\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi\right) + i\sin\left(2\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - \pi\right)\right)$

4) أكتب z_1^{2013} و z_2^{2013} و z_3^{2013} على الشكل الجبري.

$z_1^{2013} = \sqrt{2}^{2013}\left(\cos\left(\frac{2013\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2013\pi}{4}\right)\right) = 2^{1006}(1+i)$

$z_2^{2013} = \left(\cos\left(2013\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - 2013\pi\right) + i\sin\left(2013\arctan\left(\frac{12}{5}\right) - 2013\pi\right)\right)$

$z_3^{2013} = \sqrt{\frac{97}{169}}^{2013}\left(\cos\left(2013\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - 2013\pi\right) + i\sin\left(2013\arctan\left(\frac{9}{4}\right) - 2013\pi\right)\right)$

تمرين 5

**1) أحسب $p(z)$ و $p(\bar{z})$ و $p(-z)$ و $p(z+1)$ و $p(z+i)$ و $p(z+2i)$ و $p(z+3i)$ و $p(z+4i)$ و $p(z+5i)$ و $p(z+6i)$ و $p(z+7i)$ و $p(z+8i)$ و $p(z+9i)$ و $p(z+10i)$ و $p(z+11i)$ و $p(z+12i)$ و $p(z+13i)$ و $p(z+14i)$ و $p(z+15i)$ و $p(z+16i)$ و $p(z+17i)$ و $p(z+18i)$ و $p(z+19i)$ و $p(z+20i)$ و $p(z+21i)$ و