تمـــارين محـــلولة

التمرين الأول :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = 5u_n - n + \frac{1}{4}, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

1. أحسب u_1 و u_2.
2. لتكن (v_n) المتتالية المعرفة ب :

$$v_n = u_n - \frac{n}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

بين أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$.

3. أكتب u_n بدلالة n لكل n من $\mathbb{N}$، و أحسب نهاية المتتالية (u_n).
4. حدد بدلالة n المجموع التالي :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots\dots + u_n$$

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n^2 + \frac{1}{2}u_n, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{5} \end{cases}$$

1. بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا $0 < u_n < \frac{1}{4}$.
2. بين أن المتتالية (u_n) تناقصية.
3. بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا $u_n \le \frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^n$.
4. أوجد نهاية المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

التمرين الثالث :

نعتبر المتتالية $(u_n)_n$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_n = \frac{6+4u_n}{3+u_n}, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I =]-1, +\infty[$ كما يلي : $f(x) = \frac{6+3x}{3+x}$.

1. بين أن $f(I) \subset I$.
2. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$ لدينا $1 \le u_n < 3$.
3. بين أن (u_n) تزايدية و استنتج أنها متقاربة
4. حدد نهاية المتتالية (u_n).
5. لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة كما يلي :

$$v_n = \frac{-3+u_n}{2+u_n}$$

a. بين أن (v_n) متتالية هندسية محددا حدها الأول و أساسها.

b. أكتب u_n بدلالة v_n ثم تأكد من نهاية المتتالية (u_n).

التمرين الرابع:

نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_n = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{5}{4} \end{cases}$$

1. بين أن $u_n < 2$ لكل $n \in \mathbb{N}$.
2. أدرس رتابة المتتالية (u_n) و بين أنها متقاربة.
3. نضع $v_n = u_n - 2$ لكل $n \in \mathbb{N}$.

a. بين أن المتتالية $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ متتالية هندسية.

b. استنتج أن $u_n = 2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ حيث $n \in \mathbb{N}$ ثم حدد نهاية المتتالية (u_n).

4. لكل $n \in \mathbb{N}^*$ نضع :

$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots\dots + u_{n-1}$ بين أن

$$S_n = 2n - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

التمرين الخامس:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $I = [0, 2]$

$$f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x}$$

و نعتبر المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt[3]{-u_n^{\,2} + 2u_n}, n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

1. أحسب $f'(x)$ لكل x من $[0,2]$ و ضع جدول تغيرات الدالة f.
2. استنتج أن لكل $x \in [0,2]$ لدينا $0 \le f(x) \le 1$.
3. بين أن لكل $n \in \mathbb{N}$ لدينا $0 < u_n < 1$.
4. أدرس رتابة المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ و استنتج أنها متقاربة.
5. أحسب النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n$.

حلــــــول التمـــــــارين

التمرين الأول :

1. حساب u_1 و u_2

$$\begin{cases} u_1 = 5u_0 - 0 + \frac{1}{4} = \frac{21}{4} \\ u_2 = 5u_1 - 1 + \frac{1}{4} = \frac{51}{2} \end{cases}$$

2. لنبين أن المتتالية هندسية

لدينا لكل n من $\mathbb{N}$

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{n+1}{4} = 5u_n - n + \frac{1}{4} - \frac{n+1}{4}$$

$$= 5u_n - \frac{5n}{4} = 5\left(u_n - \frac{n}{4}\right) = 5v_n$$

ومنه فإن المتتالية هندسية أساسها $q = 5$ و حدها الأول هو $v_0 = u_0 - \frac{0}{4} = 1$.

3. تحديد u_n بدلالة n

لدينا $v_n = u_n - \frac{n}{4}$ و بالتالي $u_n = v_n + \frac{n}{4}$

من جهة أخرى نعلم أن المتتالية (v_n) هندسية و بالتالي حسب صيغة الحد العام لهذه المتتالية لدينا :

$$v_n = v_0 \times (5)^{n-0} = 5^n$$

إذن : $\boxed{u_n = 5^n + \frac{n}{4}, \forall n \in \mathbb{N}}$

❖ حساب نهاية المتتالية (u_n)

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(5^n + \frac{n}{4}\right) = +\infty$$

4. حساب المجموع S_n

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots\dots\dots + u_n$$

$$= \left(5^1 + \frac{1}{4}\right) + \left(5^2 + \frac{2}{4}\right) + \left(5^3 + \frac{3}{4}\right) + \dots\dots\dots + \left(5^n + \frac{n}{4}\right)$$

$$= \left(5^1 + 5^2 + 5^3 + \dots\dots\dots + 5^n\right) + \frac{1}{4}(1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + n)$$

$$= \frac{5(5^n - 1)}{5-1} + \frac{1}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{5(5^n - 1)}{4} + \frac{1}{4}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left[5^{n+1} - 5 + \frac{n(n+1)}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$$

التمرين الثاني :

1. لنبين أن $0 < u_n < \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

نستعمل البرهان بالترجع

لدينا $u_0 = \frac{1}{5}$ و بالتالي $0 < u_0 < \frac{1}{4}$

نفترض أن $0 < u_n < \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$ و لنبين أن

$$0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$$

حسب الافتراض لدينا : $0 < u_n < \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}$

إذن

$$0 < u_n < \frac{1}{4} \Rightarrow \begin{cases} 0 < u_n^{\,2} < \frac{1}{16} \\ 0 < \frac{1}{2}u_n < \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 < u_n^{\,2} + \frac{1}{2}u_n < \frac{3}{16}$$

$$\Rightarrow 0 < u_n^{\,2} + \frac{1}{2}u_n < \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{16} < \frac{1}{4}\right)$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < \frac{1}{4}$$

إذن $\boxed{0 < u_n < \frac{1}{4}, \forall n \in \mathbb{N}}$

2. لنبين أن المتتالية تناقصية

لدينا

$$u_{n+1}-u_n=u_n^{2}+\frac{1}{2}u_n-u_n=u_n\left(u_n-\frac{1}{2}\right)$$

حسب ما سبق لدينا $0<u_n<\frac{1}{4}$ إذن

$-\frac{1}{2}<u_n-\frac{1}{2}<-\frac{1}{4}$ و بالتالي $u_{n+1}-u_n<0$ إذن المتتالية تناقصية.

3. لنبين أن $u_n\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$,$n\in\mathbb{N}$

نستعمل البرهان بالترجع

← لدينا $u_0=\frac{1}{5}$ و بالتالي $u_0\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{0}$

← نفترض أن $u_n\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$,$n\in\mathbb{N}$

← لنبين أن $u_{n+1}\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$,$n\in\mathbb{N}$

حسب الافتراض $u_n\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$,$n\in\mathbb{N}$ إذن

$$u_n\left(u_n+\frac{1}{2}\right)\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow u_n^{2}+\frac{1}{2}u_n\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\frac{1}{2}\right)$$

لنقارن بين $\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\frac{1}{2}\right)$ و $\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$

$$\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\right]$$

$$=\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\left[\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}-\frac{1}{4}\right]$$

بما أن $\frac{1}{5}<\frac{1}{4}$, $\forall n\in\mathbb{N},\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\leq 1$ فإن :

$$\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\leq\frac{1}{4}\Leftrightarrow\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}-\frac{1}{4}\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)\leq\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\frac{1}{2}\right)\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}\left(\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}+\frac{1}{2}\right)\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}$$

حسب البرهان بالترجع لدينا :

$$u_n\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n},n\in\mathbb{N}$$

4. نهاية المتتالية (u_n)

لدينا $\forall n\in\mathbb{N},0<u_n\leq\frac{1}{5}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}$

بما أن $-1<\frac{3}{4}<1$ فإن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n}=0$ و بالتالي :

$$\lim_{n\to+\infty}u_n=0$$

التمرين الثالث :

1. لنبين أن $f(I)\subset I$

$$\forall x\in I,f'(x)=\frac{6}{(x+3)^{2}}>0$$

و بالتالي الدالة f تزايدية قطعا على المجال I.

$$f(I)=\left]\lim_{x\to-1^{+}}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=]1,4[$$

إذن $]1,4[\subset]-1,+\infty[$

2. لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N},1\leq u_n<3$

نستعمل البرهان بالترجع

← لدينا $u_0=1$ إذن $1\leq u_0<3$

← نفترض أن $1\leq u_n<3,n\in\mathbb{N}$

← نبين أن $1\leq u_{n+1}<3,\in\mathbb{N}$

نعلم أن f تزايدية قطعا على I و حسب الافتراض $1\leq u_n<3$ إذن $f(1)\leq f(u_n)<f(3)$

و $f(1)=\frac{10}{4}\geq 1$ و $f(3)=\frac{18}{6}=3$ و

$f(u_n)=u_{n+1}$

بالتالي $\forall n\in\mathbb{N}, 1\leq u_{n+1}<3$.

إذن حسب البرهان بالترجع $\forall n\in\mathbb{N}, 1\leq u_n<3$

3. لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية

لنبين أن المتتالية (u_n) تزايدية يكفي أن نبين أن

$u_{n+1}\geq u_n, \forall n\in\mathbb{N}$.

نستعمل البرهان بالترجع

← لدينا $u_0=1$ و $u_1=\frac{5}{2}$ إذن $u_1\geq u_0$.

← نفترض أن $u_n\geq u_{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

← لنبين أن $u_{n+1}\geq u_n, \forall n\in\mathbb{N}$

نعلم أن f تزايدية قطعا على I و حسب الافتراض

إذن $u_n\geq u_{n-1}, \forall n\in\mathbb{N}^*$

و هذا يعني $f(u_n)\geq f(u_{n-1})$

أن $u_{n+1}\geq u_n, \forall n\in\mathbb{N}$

ومنه فإن المتتالية (u_n) تزايدية.

المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد 3 و بالتالي فإنها متقاربة.

4. تحديد نهاية المتتالية (u_n)

بما أن f متصلة على I و $f(I)\subset I$ و $u_n\in I$ لكل n من $\mathbb{N}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ و المتتالية (u_n) متقاربة فإن نهاية المتتالية l (u_n) تحقق ما يلي :

$$f(l)=l, l\in I$$

$$f(l)=l \Leftrightarrow \frac{6+4l}{3+l}=l \Leftrightarrow 6+4l=3l+l^2$$

$$\Leftrightarrow l^2-l-6=0$$

$$\Leftrightarrow l=3, l=-2$$

إذن $\lim_{n\to+\infty} u_n=3$

5. لدينا $v_n=\frac{-3+u_n}{2+u_n}$

a) لنبين أن المتتالية (v_n) هندسية

$$v_{n+1}=\frac{-3+u_{n+1}}{2+u_{n+1}}=\frac{-3+\frac{6+4u_n}{3+u_n}}{2+\frac{6+4u_n}{3+u_n}}$$

$$=\frac{-9-3u_n+6+4u_n}{6+2u_n+6+4u_n}=\frac{-3+u_n}{12+6u_n}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{-3+u_n}{2+u_n}\right)=\frac{1}{6}v_n$$

و بالتالي فإن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{1}{6}$ و حدها الأول

$v_0=\frac{-3+u_0}{2+u_0}=\frac{-2}{3}$.

b) كتابة u_n بدلالة n

حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية نجد أن :

$$\boxed{v_n=\frac{-2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n, n\in\mathbb{N}}$$

من جهة أخرى لدينا :

$$v_n=\frac{-3+u_n}{2+u_n}\Leftrightarrow 2v_n+v_nu_n=-3+u_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(1-v_n)=3+2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n=\frac{3+2v_n}{1-v_n}=\frac{3-\frac{4}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}, n\in\mathbb{N}$$

التمرين الرابع:

1. لنبين أن $u_n<0, n\in\mathbb{N}$

نستعمل البرهان بالترجع

← لدينا $u_0=\frac{5}{4}$ إذن $u_0<2$.

← نفترض أن $u_n<2, n\in\mathbb{N}$

← لنبين أن $u_{n+1}<2, n\in\mathbb{N}$

$$u_n<2\Leftrightarrow \frac{1}{4}u_n+\frac{3}{2}<\frac{1}{4}.2+\frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1}<2, n\in\mathbb{N}$$

و بالتالي حسب البرهان بالترجع لدينا

$u_n < 2, n \in \mathbb{N}$

2. لنبين أن المتتالية تزايدية

$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2} - u_n = \frac{3}{2} - \frac{3}{4}u_n$

$= \frac{3}{4}(2 - u_n)$

بما أن $u_n < 2$ فإن $2 - u_n > 0$ و بالتالي

$u_{n+1} - u_n > 0$

إذن المتتالية (u_n) تزايدية .

المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد 2 إذن فهي متقاربة.

3. $v_n = u_n - 2, n \in \mathbb{N}$

a) لنبين أن المتتالية هندسية

$v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2} - 2$

$= \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(u_n - 2) = \frac{1}{4}v_n$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{4}$ و

حدها الأول $v_0 = u_0 - 2 = \frac{-3}{4}$.

b) تحديد نهاية المتتالية (u_n)

حسب صيغة الحد العام لمتتالية هندسية لدينا :

$v_n = -\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

$v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow u_n = v_n + 2 = 2 - \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

بما أن $-1 < \frac{1}{4} < 1$ فإن $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$.

بالتالي $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$

4. حساب المجموع S_n

$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1}$

$= (v_0 + 2) + (v_1 + 2) + ... + (v_{n-1} + 2)$

$= (v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}) + (2 + 2 + ... + 2)$

$= \frac{-3}{4} \frac{\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{4}} + 2n$

$= \frac{\frac{-3}{4}\left[1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right]}{\frac{-3}{4}} + 2n$

$= 2n - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

إذن $S_n = 2n - 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^n$

التمرين الخامس:

1. حساب الدالة المشتقة ووضع جدول التغيرات

$\forall x \in]0, 2[, f'(x) = \frac{-2x + 2}{3\sqrt[3]{(-x^2 + 2x)^2}}$

جدول تغيرات الدالة f

x	0		1		+00
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

2. لنبين أن $0 \le f(x) \le 1, x \in [0, 2]$

من خلا جدول التغيرات نستنتج أن

$\forall x \in [0, 2], 0 \le f(x) \le f(1)$ لأن $f(1)$ قيمة قصوى للدالة f أي $0 \le f(x) \le 1, x \in [0, 2]$.

3. لنبين أن $0 < u_n < 1, n \in \mathbb{N}$

نوظف البرهان بالترجع

← لدينا $u_0 = \frac{1}{2}$ إذن $0 < u_0 < 1$.

← نفترض أن $0 < u_n < 1, n \in \mathbb{N}$

← لنبين أن $0 < u_{n+1} < 1, n \in \mathbb{N}$

نعلم أن f تزايدية قطعا على $[0,1]$ و حسب الافتراض

$0<u_n<1, n\in\mathbb{N}$ إذن $f(0)<f(u_n)<f(1)$ يعني

$0<u_{n+1}<1$. إذن حسب البرهان بالترجع لدينا $0<u_n<1, n\in\mathbb{N}$.

4. دراسة رتابة المتتالية (u_n)

لندرس إشارة u_n-u_{n-1}.لهذا الغرض نستعمل البرهان بالترجع.

← لدينا $u_1-u_0>0$

← نفترض أن $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n-u_{n-1}>0$

← لنبين أن $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}>u_n$

نعلم أن f تزايدية قطعا على $]0,1[$ و حسب الافتراض

$u_n>u_{n-1}$ إذن $f(u_n)>f(u_{n-1})$ يعني

$u_{n+1}>u_n$، و منه فإن المتتالية (u_n) تزايدية .

بما أن المتتالية (u_n) تزايدية و مكبورة بالعدد 1 فإنها متقاربة.

5. نهاية المتتالية (u_n)

بما أن f دالة متصلة على المجال $[0,1]$ و $f([0,1])\subset[0,1]$ و $u_n\in[0,1]$ لكل $n\in\mathbb{N}$ و $u_{n+1}=f(u_n)$ و (u_n) متقاربة إذن l نهاية (u_n) تحقق ما يلي : $f(l)=l$ و $l\in[0,1]$.

$$\begin{aligned}
f(l)=l &\Leftrightarrow \sqrt[3]{-l^2+2l}=l\\
&\Leftrightarrow -l^2+2l=l^3\\
&\Leftrightarrow l^3+l^2-2l=0\\
&\Leftrightarrow l(l^2+l-2)=0\\
&\Leftrightarrow l(l-1)(l+2)=0\\
&\Leftrightarrow l=0, l=1, l=-2
\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to+\infty} u_n=1$$

تمـــارين للإنجـــــاز

التمرين الأول :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $I=[2,3]$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{5x+2}{x+3}$

1. ضع جدول تغيرات الدالة f ثم بين أن $f(I)\subset I$.
2. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{5u_n+2}{u_n+3}, n\in\mathbb{N}\\ u_0=2\end{cases}$$

a) بين أن $2\le u_n\le 3, n\in\mathbb{N}$.

b) بين أن (u_n) متتالية تزايدية.

c) استنتج أن (u_n) متقاربة ثم حدد نهايتها.

التمرين الثاني :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة ب :

$$\begin{cases} u_{n+1}=\dfrac{3u_n^2+2}{3u_n+1}, n\in\mathbb{N}\\ u_0=1\end{cases}$$

1. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}: 2-u_{n+1}=\dfrac{3u_n}{1+3u_n}(2-u_n)$.
2. بين بالترجع أن $0<u_n<2, n\in\mathbb{N}$.
3. بين أن المتتالية (u_n) تزايدية و استنتج أنها متقاربة.
4. بين أن $\forall n\in\mathbb{N}, \dfrac{3u_n}{1+3u_n}<\dfrac{6}{7}$.
5. استنتج أن $\forall n\in\mathbb{N}, 2-u_n<\left(\dfrac{6}{7}\right)^n$.
6. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثالث :

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $\mathbb{R}^+$ بما يلي : $f(x)=\dfrac{x}{1+\sqrt[3]{x}}$

1. بين أن $\forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq x$.
2. حدد صورة المجال $I = [0,1]$ بالدالة f.
3. لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي :

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n), n \in \mathbb{N} \\ u_0 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

a) تحقق أن $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq u_n \leq 1$.

b) استنتج أن (u_n) متقاربة و أحسب $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

التمرين الرابع :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة ب:

$$f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{2}}$$

1. بين أن الدالة f رتيبة قطعا على المجال $I = \left[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right]$ ثم استنتج $f(I)$.

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة ب:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n + 3}{2}} \end{cases}$$

a) بين أن : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq \frac{3}{2}$: $(\forall n \in IN)$.

b) بين أن المتتالية (u_n) تزايدية .

c) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة , ثم حدد $\lim_{x \to +\infty} u_n$