الإتصال و دراسة الدوال

تمرين1

احسب

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{15x^3+7x+10}-\sqrt[3]{15x^3+1}$$

الحل:

$$A=\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{15x^3+7x^2+10}-\sqrt[3]{15x^3+1}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \frac{7x^2+9}{\sqrt[3]{15x^3+7x^2+10}^2+\sqrt[3]{15x^3+7x^2+10}\sqrt[3]{15x^3+1}+\sqrt[3]{15x^3+1}^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(7+\frac{9}{x^2}\right)}{x^2\left(\sqrt[3]{15+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^3}}^2+\sqrt[3]{15+\frac{7}{x}+\frac{10}{x^3}}\sqrt[3]{15+\frac{1}{x^3}}+\sqrt[3]{15+\frac{1}{x^3}}^2\right)}$$

$$\boxed{A=\frac{7}{3\sqrt[3]{15}^2}}$$

تمرين2

حدد D_f ثم بين أن f متصلة في x_0 :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{x}-15}{x-3375} & x\neq 3375 \\ f(3375)=\dfrac{1}{675} \end{cases} \qquad x_0=3375$$

الحل التمرين 2:

$D_f=\mathbb{R}^+$

طريقة 1

$$\lim_{x\to3375} f(x)=\lim_{x\to3375}\frac{\sqrt[3]{x}-15}{x-3375}$$

$$=\lim_{x\to3375}\frac{1}{\sqrt[3]{x}^2+15\sqrt[3]{x}+225}$$

$$\lim_{x\to3375} f(x)=\frac{1}{675}$$

بما أن : $f(3375)=\dfrac{1}{675}$

فإن : $\lim_{x\to3375} f(x)=f(3375)$

إذن : f متصلة في 3375

طريقة 2 (العدد المشتق)

نعتبر : $g(x)=\sqrt[3]{x}$ متصلة على $\mathbb{R}$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}^*$

و $g'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x}^2}$ $\quad \forall x\in\mathbb{R}^*$

نعتبر : $x_0=3375$, $g(3375)=15$ و

$$g'(3375)=\frac{1}{675}$$

$$\lim_{x\to3375} f(x)=\lim_{x\to3375}\frac{g(x)-g(3375)}{x-3375}$$

$$=g'(3375)$$

$$\lim_{x\to3375} f(x)=\frac{1}{675}$$

بما أن : $f(3375)=\dfrac{1}{675}$

فإن : $\lim_{x\to3375} f(x)=f(3375)$

إذن : f متصلة في 3375

تمرين3

$$f(x)=3x+\sqrt{2x-6}$$

حدد $I=D_f$

أ- اثبت أن f المعرفة من I نحو J (يجب تحديد J) تقبل دالة عكسية f^{-1} . ثم حدد f^{-1}

ب- استنتج أن المعادلة : $f(x)=10$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

حل التمرين 3:

أ - $I=D_f=[3,+\infty[$

f متصلة على D_f قابلة للإشتقاق على $]3;+\infty[$ $\qquad (1)$

$$f'(x)=3+\frac{1}{\sqrt{2x-6}} \qquad \forall x\in]3;+\infty[$$

بما أن : $f'(x)>0$ $\quad \forall x\in]3;+\infty[$

فإن : f تزايدية قطعا على $[3;+\infty[$ $\qquad (2)$

إذن : $f([3,+\infty[)=\left[f(3),\lim_{x\to+\infty} f(x)\right[$

و منه : $f([3,+\infty[)=[9,+\infty[$

من (1) و (2) : f تقبل دالة عكسية f^{-1}

تحديد : f^{-1}

ليكن $x\in[9;+\infty[$ و $y\in[3;+\infty[$

$$f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow f(y)=x$$

$$\Leftrightarrow 3y+\sqrt{2y-6}=x$$

$$\Leftrightarrow 2y-6=x^2+9y^2-6xy$$

$$\Leftrightarrow 9y^2-2y(3x+1)+(x^2+6)=0$$

$$9y^2-2y\left(3x+1\right)+\left(x^2+6\right)=0$$
$$\Delta=4\left(3x+1\right)^2-4\left(x^2+6\right)\times 9$$
$$\Delta=4\left(6x-53\right)$$

بما أن : $x\geq 9$ **فإن :** $6x-53>0$

$$y_1=\frac{3x+1-\sqrt{6x-53}}{9}$$

أو $$y_2=\frac{3x+1+\sqrt{6x-53}}{9}$$

بالنسبة ل $x=9$ **نجد :** $y_1=3$ **و** $y_2\neq 3$

بما أن : $f(3)=9$ **فإن :** $f^{-1}(x)=y_1$

إذن : $f^{-1}(x)=\dfrac{3x+1-\sqrt{6x-53}}{9}$: $\forall x\in\left[9;+\infty\right[$

و منه :
$$\begin{array}{rcl} f^{-1}: & \left[9;+\infty\right[\to \left[3;+\infty\right[\\ x & \to \dfrac{3x+1-\sqrt{6x-53}}{9} \end{array}$$

ب- بما أن f **متصلة و رتيبة قطعا على** $\left[3;+\infty\right[$

و $f\left(\left[3,+\infty\right[\right)=\left[9,+\infty\right[$ **و** $10\in\left[9,+\infty\right[$

فإن : المعادلة : $f(x)=10$ **تقبل حلا وحيدا في المجال** I

تمرين4

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1} & x\in\left[\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[-\{1\} \\ f(1)=12 \end{cases}$$

أ- بين أن f **متصلة في 1**

ب- بين أن f **قابلة للاشتقاق في 1**

ج- احسب $f'(x)$

حل التمرين 4:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1} & x\in\left[\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[-\{1\} \\ f(1)=12 \end{cases}$$

أ - لنبين أن : f **متصلة في 1**

نعتبر : $g(x)=\sqrt{13x^2-12}-x$ **معرفة على** $\left[\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[$

g **متصلة على** $\left[\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[$ **قابلة للإشتقاق على** $\left]\sqrt{\dfrac{12}{13}};+\infty\right[$

$$\forall x\in\left]\sqrt{\frac{12}{13}};+\infty\right[\ :\ g'(x)=\frac{13x}{\sqrt{13x^2-12}}-1$$

$g(1)=0$ **و** $g'(1)=12$

$$\lim_{x\to 1}f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$$
$$=g'(1)$$
$$\lim_{x\to 1}f(x)=12$$

إذن : $\lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

و منه : f **متصلة في 1**

ب- لنبين أن : f **قابلة للاشتقاق في 1**

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\dfrac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1}-12}{x-1}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{13x^2-12}-(13x-12)}{(x-1)^2}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{(13x^2-12)-(13x-12)^2}{(x-1)^2\left(\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-156x^2+312x-156}{(x-1)^2\left(\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-156(x-1)^2}{(x-1)^2\left(\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)\right)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{-156}{\sqrt{13x^2-12}+(13x-12)}$$
$$=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$=\frac{-156}{2}$$

$$\boxed{\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=-78}$$

إذن : f **قابلة للاشتقاق في 1**

و : $\boxed{f'(1)=-78}$

ج- $\forall x \in \left]\sqrt{\frac{12}{13}};+\infty\right[-\{1\}$

$$f'(x)=\left(\frac{\sqrt{13x^2-12}-x}{x-1}\right)'$$
$$=\frac{\left(\frac{13x}{\sqrt{13x^2-12}}-1\right)(x-1)-\left(\sqrt{13x^2-12}-x\right)}{(x-1)^2}$$
$$\boxed{f'(x)=\frac{\sqrt{13x^2-12}-13x+12}{(x-1)^2\sqrt{13x^2-12}}}$$

تمرين5

حلل هندسيا ما يلي :

أ - $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$

ب- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-\infty$

ج- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

د- $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

حل اتمرين5

أ - $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$

(C_f) يقبل نصف مماس أفقي يسار النقطة ذات الأفصول 3

ب- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=-\infty$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأسفل .

ج- $\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يمين النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأعلى

د- $\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=+\infty$

(C_f) يقبل نصف مماس عمودي يسار النقطة ذات الأفصول 3 موجه نحو الأسفل .

الاتصـــــــال

السلسلة 1 (10 تمارين)

التمرين 1 :

1. لتكن f الدالة المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ;x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$ أدرس اتصال f في 0 .

2. نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2};x\neq 2 \\ f(2)=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$

أدرس اتصال الدالة f في النقطة 2 .

3. لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1};x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$ أدرص اتصال الدالة f في 0 .

4. لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي: $\begin{cases} f(x)=x^2+2x+3;x\geq -2 \\ f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+2};x<-2 \end{cases}$ أدرس اتصال f في -2.

5. نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=2\dfrac{\sin(3x)}{x}+1 & ;x>0 \\ f(x)=x+m-\dfrac{1}{2} & ;x\leq 0 \end{cases}$ حدد قيمة m لكي تكون f متصلة في 0.

6. لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي: $\begin{cases} g(x)=x-k & ;x<0 \\ g(0)=2 \\ g(x)=1+\dfrac{\tan x}{x} & ;x>0 \end{cases}$ حيث k عدد حقيقي.

حدد قيمة k التي من أجلها تكون g متصلة في $x_0=0$.

التمرين 2 :

1. نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3-8}{x-2} & ;x\neq 2 \\ f(2)=12 \end{cases}$ أدرس اتصال الدالة f على D_f
2. نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=x^5-6x^2+3x+7$ أدرس اتصال الدالة f على D_f
3. نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=2\sin x+3\cos x$ أدرس اتصال الدالة f على D_f
4. نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\sqrt{x^2-1}$ أدرس اتصال الدالة f على D_f
5. نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^2+1}$ أدرس اتصال الدالة f على D_f
6. نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي : $f(x)=(x^2-3x+4)\times\cos x$ أدرس اتصال الدالة f على D_f
7. لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=\dfrac{x^2+x-1}{x^2+1}+\sqrt{x^2-x+4}$
   أدرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$

التمرين 3 :

بين أن المعادلة (E) تقبل على الأقل حلا في المجال I في الحالتين التاليتين:

1. $I=[0,1];(E):x^5-x^3+5x-4=0$
2. $I=\left]\dfrac{\pi}{3},\pi\right[;(E):2\sin x=x$

التمرين 4 :

بين أن المعادلة $x^3+2x-4=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]1,\dfrac{3}{2}\right[$

التمرين 5 :

بين أن المعادلة $2x^3+7x-4=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\mathbb{R}$ و أن $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$

التمرين 6 :

لتكن f دالة عددية متصلة على مجال $[a,b]$ بحيث: $f(b)>b^2$ و $f(a)<ab$

بين أن : $\exists c\in[a,b]:f(c)=bc$

التمرين 7 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=2x^3+x-1$

1. بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ثم تحقق أن $0<\alpha<1$.
2. أدرس إشارة الدالة f.

التمرين 8 :

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=\sin x+2\cos x$

1. تحقق من أن: $g(0)>0$ و $g\left(\frac{\pi}{2}\right)<\frac{\pi}{2}$
2. أثبت أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

التمرين 9 :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي: $f(x)=4x^3-3x-\frac{1}{2}$

1. أحسب $f(-1)$ و $f\left(\frac{-1}{2}\right)$ و $f(0)$ و $f(1)$
2. استنتج أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$

التمرين 10:

لتكن f دالة متصلة و معرفة من مجال $[a;b]$ نحو $[a;b]$.
بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a;b]$

تصحيح التمرين 1:

1) $$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x} & ;x\neq 0 \\ f(0)=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

لندرس اتصال الدالة f في 0 :

لدينا : $f(0)=\dfrac{1}{2}$. لنحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(x+\cancel{1}\right)-\cancel{1}}{x\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\frac{1}{2}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$ فإن f متصلة في 0

2) $$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} ;x\neq 2 \\ f(2)=-\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

لندرس اتصال f في 2 :

لدينا : $f(2)=-\dfrac{1}{3}$. لنحسب $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$:

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x-3)}{\cancel{(x-2)}(x+1)}=\lim_{x\to 2}\frac{x-3}{x+1}=\frac{-1}{3}$$

بما أن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$ فإن f متصلة في 2

3) $$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} ;x\neq 0 \\ f(0)=2 \end{cases}$$

لندرس اتصال الدالة f في 0 :

لدينا : $f(0)=2$. لنحسب $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$:

$$\lim_{x\to0} f(x)=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x.\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}-1\right)\left(\sqrt{x+1}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x.\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x+1}\right)^2-1^2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x.\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{\left(x+\cancel{1}\right)-\cancel{1}}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}.\left(\sqrt{x+1}+1\right)=1\times2=2$$

بما أن $\lim_{x\to0} f(x)=f(0)$ فإن f متصلة في 0

(4 $\begin{cases} f(x)=x^2+2x-3; x\geq-2 \\ f(x)=\dfrac{x^2+x-2}{x+2}; x<-2 \end{cases}$

لندرس اتصال الدالة f في -2 :

لدينا : $f(-2)=(-2)^2+2(-2)-3=-3$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} x^2+2x-3=-3$$

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\frac{x^2+x-2}{x+2}=\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\frac{\cancel{(x+2)}(x-1)}{\cancel{x+2}}=\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} x-1=-3$$

بما أن $\lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=f(-2)$ فإن f متصلة في -2

(5 $\begin{cases} f(x)=2\dfrac{\sin(3x)}{x}+1 \quad ;x>0 \\ f(x)=x+m-\dfrac{1}{2} \quad ;x\leq0 \end{cases}$ لنحدد قيمة m لكي تكون f متصلة في 0.

لدينا $f(0)=(0)+m-\frac{1}{2}=m-\frac{1}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} x+m-\frac{1}{2}=m-\frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} 2\frac{\sin(3x)}{x}+1=\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} 2\times3\times\frac{\sin(3x)}{3x}+1=2\times3\times1+1=6+1=7$$

f متصلة في 0 تعني $\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x)=f(0)$

تعني $7=m-\frac{1}{2}$ أي $m=7+\frac{1}{2}$ أي $m=\frac{15}{2}$.

6) $\begin{cases} g(x) = x - k & ;x < 0 \\ g(0) = 2 \\ g(x) = 1 + \dfrac{\tan x}{x} & ;x > 0 \end{cases}$. لنحدد قيمة k لكي تكون g متصلة في 0 .

لدينا $g(0) = 2$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} x - k = -k$$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} 1 + \frac{\tan(x)}{x} = 1 + 1 = 2$$

g متصلة في 0 تعني $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} g(x) = g(0)$

تعني $-k = 2$ أي $k = -2$

تصحيح التمرين 2:

1. لدينا : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x - 2} & ;x \neq 2 \\ f(2) = 12 \end{cases}$.

لنحدد D_f : $D_f = (\{x \in \mathbb{R} / x - 2 \neq 0\}) \cup \{2\} = (\{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}) \cup \{2\} = (\mathbb{R} / \{2\}) \cup \{2\} = \mathbb{R}$

- الدالة f متصلة على $\mathbb{R}/\{2\}$ (لأن f دالة جدرية)
- لندرس اتصال f في 2 : لدينا $f(2) = 12$

لنحسب $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2^2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

بما أن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2)$ فإن f متصلة في 2 .

<u>خلاصة :</u> الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

2. لدينا : $f(x) = x^5 - 6x^2 + 3x + 7$

الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

3. لدينا : $f(x) = 2\sin x + 3\cos x$

$f_1 : x \mapsto 2\sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto 3\cos x$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن $f = f_1 + f_2$ متصلة على $\mathbb{R}$ (كمجموع لدالتين متصلتين على $\mathbb{R}$)

4. لدينا : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

لنحدد D_f : لنحدد $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \geq 0\}$

x	$-\infty$ $\quad -1$		1 $\quad +\infty$
x^2-1	$+$	$-$	0 $\quad +$

إذن : $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

نضع $f_1 : x \mapsto x^2 - 1$

لدينا : الدالة f_1 متصلة على $\mathbb{R}$ بالخصوص على D_f و $(\forall x \in D_f) \quad f_1(x) \geq 0$

إذن الدالة $f = \sqrt{f_1}$ متصلة على D_f.

5. لدينا : $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$. لنحدد D_f : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0 \quad , \quad x \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

$f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

$f_2 : x \mapsto x^2 + 1$ متصلة على $\mathbb{R}$ بالخصوص على $\mathbb{R}^+$ و $(\forall x \in \mathbb{R}^+) \quad f_2(x) \neq 0$

إذن $f = \dfrac{f_1}{f_2}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ (كخارج دالتين متصلتين على $\mathbb{R}^+$)

6. لدينا : $f(x) = (x^2 - 3x + 4) \times \cos x$

$D_f = \mathbb{R}$

$f_1 : x \mapsto x^2 - 3x + 4$ متصلة على $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto \cos x$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن $f = f_1 \times f_2$ متصلة على $\mathbb{R}$ كجداء دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

7. لدينا : $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x + 4}$

$D_f = \mathbb{R}$

$f_1 : x \mapsto x^2 + x - 1$ متصلة على $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto x^2 + 1$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f_2(x) \neq 0$

- إذن $h = \dfrac{f_1}{f_2}$ متصلة على $\mathbb{R}$

$f_3 : x \mapsto x^2 - x + 4$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f_3(x) \geq 0$ $(\forall x \in \mathbb{R})$

- إذن $k = \sqrt{f_3}$ متصلة على $\mathbb{R}$

❖ و بالتالي : $f = h + k$ متصلة على $\mathbb{R}$ كمجموع دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

تصحيح التمرين 3:

1. لنبين أن المعادلة $(E): x^5 - x^3 + 5x - 4 = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0,1]$

نعتبر الدالة $f : x \mapsto x^5 - x^3 + 5x - 4$

✓ الدالة f متصلة على المجال $[0,1]$

✓ $\begin{cases} f(0) = -4 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0,1]$

2. لنبين أن المعادلة $(E): 2\sin x = x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $I = \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$

$(2\sin x = x \Leftrightarrow 2\sin x - x = 0)$

نعتبر الدالة $f : x \mapsto 2\sin x - x$

✓ الدالة f متصلة على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

✓ $\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} > 0 \\ f(\pi) = -\pi < 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f(\pi) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$

و منه المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل في المجال $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right[$

تصحيح التمرين 4 :

لنبين أن المعادلة $x^3 + 2x - 4 = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left]1, \frac{3}{2}\right[$

نعتبر الدالة $f : x \mapsto x^3 + 2x - 4$

✓ الدالة f متصلة على المجال $\left[1,\frac{3}{2}\right]$

✓ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\left[1,\frac{3}{2}\right]$

ليكن $x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]$: $f'(x)=\left(x^3+2x-4\right)'=3x^2+2$

إذن : $f'(x)>0$ $\left(\forall x\in\left[1,\frac{3}{2}\right]\right)$

إذن الدالة f تزايدية قطعا على $\left[1,\frac{3}{2}\right]$

✓ $\begin{cases} f(1)=-1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{19}{8} \end{cases} \Rightarrow f(1)\times f\left(\frac{3}{2}\right)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $\left[1,\frac{3}{2}\right]$

تصحيح التمرين 5:

لنبين أن المعادلة $2x^3+7x-4=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\mathbb{R}$ و أن $\frac{1}{2}<\alpha<1$

أولا : لنبين أن المعادلة $2x^3+7x-4=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\mathbb{R}$

نضع : $f:x\mapsto 2x^3+7x-4$

✓ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$

✓ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(2x^3+7x-4\right)'=6x^2+7$

إذن : $f'(x)'>0$ $(\forall x\in\mathbb{R})$

إذن الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

✓ لنحسب $f(\mathbb{R})$: $f(\mathbb{R})=f(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$

إذن $0\in f(\mathbb{R})$

و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\mathbb{R}$

ثانيا : لنبين أن $\frac{1}{2}<\alpha<1$

- ✓ الدالة f متصلة على $\left[\frac{1}{2},1\right]$
- ✓ $\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{4} \\ f(1)=5 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right)\times f(1)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $\frac{1}{2}<\alpha<1$

تصحيح التمرين 6:

نعتبر الدالة g المعرفة على $[a,b]$ بما يلي : $g(x)=f(x)-bx$

الدالة g متصلة على $[a,b]$ (كمجموع دالتين متصلتين على $[a,b]$: حسب المعطيات f دالة عددية متصلة على مجال $[a,b]$ و $x\mapsto -bx$ متصلة على $\mathbb{R}$ بالخصوص على $[a,b]$)

لدينا $g(a)=f(a)-ba$ و بما أن $f(a)<ab$ فإن $f(a)-ab<0$ و منه $g(a)<0$

لدينا $g(b)=f(b)-b^2$ و بما أن $f(b)>b^2$ فإن $f(b)-b^2>0$ و منه $g(b)>0$

إذن $g(a)\times g(b)<0$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطية : يوجد c من $[a,b]$ بحيث $g(c)=0$

و منه يوجد c من $[a,b]$ بحيث $f(c)-bc=0$

أي يوجد c من $[a,b]$ بحيث $f(c)=bc$

تصحيح التمرين 7:

1. نضع $f:x\mapsto 2x^3+x-1$

أولا : لنبين أن المعادلة $2x^3+x-1=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\mathbb{R}$

- ✓ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$
- ✓ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(2x^3+x-1\right)'=6x^2+1$

إذن : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)'>0$

إذن الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

✓ لنحسب $f(\mathbb{R})$: $f(\mathbb{R})=f(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim_{x\to-\infty}f(x),\lim_{x\to+\infty}f(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$ إذن $0\in f(\mathbb{R})$

و بالتالي المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\mathbb{R}$

ثانيا : لنبين أن $0<\alpha<1$

✓ الدالة f متصلة على $[0,1]$

✓ $\begin{cases} f(0)=-1 \\ f(1)=2 \end{cases} \Rightarrow f(0)\times f(1)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : $0<\alpha<1$

2. لندرس إشارة الدالة f :

الحالة 1: إذا كان $x\le\alpha$

لدينا الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذن $f(x)\le f(\alpha)$ و منه $f(x)\le 0$

(α حل للمعادلة $f(x)=0$ إذن $f(\alpha)=0$)

الحالة 2: إذا كان $x\ge\alpha$

لدينا الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$ إذن $f(x)\ge f(\alpha)$ و منه $f(x)\ge 0$

تصحيح التمرين 8:

1. لدينا $g(0)=\sin(0)+2\cos(0)=(0)+2\times(1)=2$ إذن $g(0)>0$

لدينا $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1)+2\times(0)=1$ إذن $g\left(\frac{\pi}{2}\right)<1$

2. لنبين أن المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

نعتبر الدالة h المعرفة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $h(x)=g(x)-x$

✓ الدالة h متصلة على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (كمجموع دالتين متصلتين على $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$)

✓ $\begin{cases} h(0)=g(0)>0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right)=g\left(\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{2}<1-\frac{\pi}{2}<0 \end{cases} \Rightarrow h(0)\times h\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

و منه المعادلة $g(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

تصحيح التمرين 9:

1) $f(-1)=4(-1)^3-3(-1)-\frac{1}{2}=-4+3-\frac{1}{2}=\frac{-3}{2}$

$f\left(\frac{-1}{2}\right)=4\left(\frac{-1}{2}\right)^3-3\left(\frac{-1}{2}\right)-\frac{1}{2}=4\left(\frac{-1}{8}\right)+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$f(0)=4(0)^3-3(0)-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$

$f(1)=4(1)^3-3(1)-\frac{1}{2}=4-3-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

2)

- الدالة f متصلة على $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$ و $f(-1)\times f\left(\frac{-1}{2}\right)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $\left[-1,-\frac{1}{2}\right]$
- الدالة f متصلة على $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ و $f\left(\frac{-1}{2}\right)\times f(0)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $\left[-\frac{1}{2},0\right]$
- الدالة f متصلة على $[0,1]$ و $f(0)\times f(1)<0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في $[0,1]$

❖ خلاصة : المعادلة $f(x)=0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1;1]$

تصحيح التمرين 10:

نعتبر الدالة g المعرفة على $[a,b]$ بما يلي : $g(x)=f(x)-x$

✓ الدالة g متصلة على $[a,b]$ (كمجموع دالتين متصلتين على $[a,b]$)

✓ بما أن f دالة معرفة من $[a;b]$ نحو $[a;b]$ فإن $f(a)\in[a;b]$ و $f(b)\in[a;b]$

و منه $a\leq f(a)$ و $f(b)\leq b$ أي $f(a)-a\geq 0$ و $f(b)-b\leq 0$ إذن $g(a)\geq 0$ و $g(b)\leq 0$

و بالتالي : $g(a)\times g(b)\leq 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a;b]$
و بالتالي : المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a;b]$.

つづく