

القدرات المستهدفة

- التعبير عن المسافة و التعامد بواسطة الجداء السلمي.
- استعمال الجداء السلمي في حل مسائل هندسية.
- استعمال مبرهنة ألكاشي و مبرهنة المتوسط لحل تمارين هندسية.

تمرين رقم 1:

ليكن  $ABC$  مثلثا بحيث  $AB = 3\sqrt{2}$  و  $AC = 2\sqrt{2}$  و  $\hat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ .

1 - أ - تحقق أن:  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = -6$   
ب - أحسب المسافة  $BC$ .

ج - النقطة  $I$  هي منتصف القطعة  $[BC]$ . أحسب المسافة  $AI$ .

2 - لتكن  $D$  نقطة بحيث  $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \overline{AC}$ .

بين أن المثلث  $ABD$  قائم الزاوية في النقطة  $A$ .

تصحيح التمرين رقم 1:

$ABC$  مثلثا بحيث  $AB = 3\sqrt{2}$  و  $AC = 2\sqrt{2}$  و  $\hat{BAC} = \frac{2\pi}{3}$ .

1 - أ -  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{BAC}$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 3\sqrt{2} \times 2\sqrt{2} \times \cos \frac{2\pi}{3}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6 \times 2 \times \left(-\cos \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -6$$

ب - باستعمال مبرهنة ألكاشي:  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}$

$$BC^2 = (3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2(-6)$$

$$BC^2 = 18 + 8 + 12$$

$$BC^2 = 38$$

$$BC = \sqrt{38}$$

ج - باستعمال مبرهنة المتوسط  $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$

$$(3\sqrt{2})^2 + (2\sqrt{2})^2 = 2AI^2 + \frac{(\sqrt{38})^2}{2}$$

$$18 + 8 = 2AI^2 + \frac{38}{2}$$

$$26 = 2AI^2 + 19$$

$$2AI^2 = 26 - 19$$

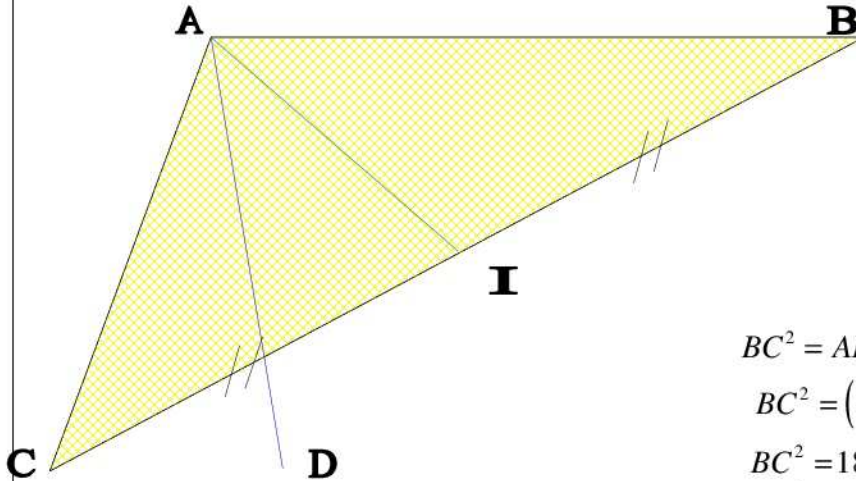
$$2AI^2 = 7$$

$$AI^2 = \frac{7}{2}$$

$$AI = \sqrt{\frac{7}{2}}$$

2 - لتكن  $D$  نقطة بحيث  $\overline{AD} = \frac{1}{3}\overline{AB} + \overline{AC}$ . لنحسب  $\overline{AB} \cdot \overline{AD}$ .

$$\overline{AB} \cdot \overline{AD} = \overline{AB} \cdot \left(\frac{1}{3}\overline{AB} + \overline{AC}\right)$$



$$= \frac{1}{3} \overline{AB}^2 + \overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$= \frac{1}{3} (3\sqrt{2})^2 - 6$$

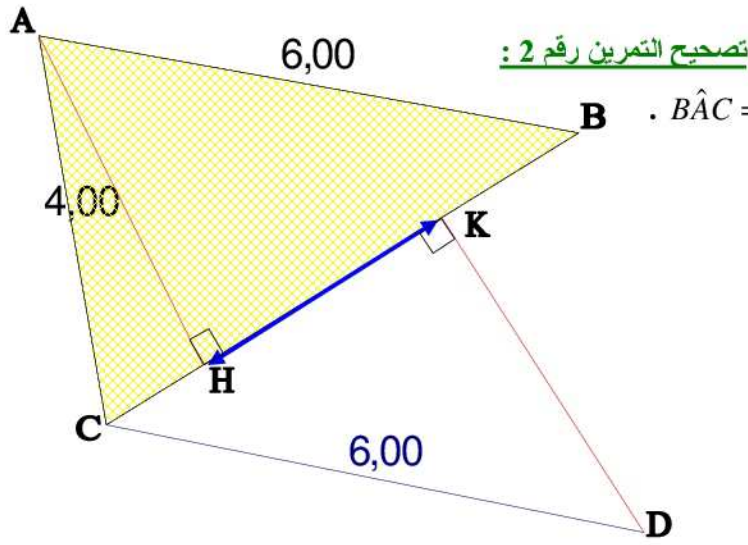
$$= \frac{18}{3} - 6 = 6 - 6 = 0$$

وبما أن  $\overline{AB} \cdot \overline{AD} = 0$  فإن المثلث  $ABD$  قائم الزاوية في النقطة  $A$

### تمرين رقم 2:

ليكن  $ABC$  مثلثا بحيث  $AB = 6$  و  $AC = 4$  و  $\hat{BAC} = \frac{\pi}{3}$ .

- 1 - أحسب :  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ .
- 2 - أحسب المسافة  $BC$ .
- 3 - لتكن النقطة  $D$  بحيث  $\overline{CD} = \overline{AB}$  و  $H$  و  $K$  على التوالي المسقطين العموديين للنقطتين  $A$  و  $D$  على  $(BC)$ .
  - أ - بين أن :  $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AC^2 - AB^2$
  - ب - بين أن  $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = -BC \times HK$
  - ج - استنتج قيمة المسافة  $HK$ .



1 - لدينا  $ABC$  مثلثا بحيث  $AB = 6$  و  $AC = 4$  و  $\hat{BAC} = \frac{\pi}{3}$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos \hat{BAC}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 6 \times 4 \times \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 24 \times \frac{1}{2} = 12$$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \overline{AB} \cdot \overline{AC} \quad - 2$$

$$BC^2 = 6^2 + 4^2 - 2 \times 12$$

$$BC^2 = 36 + 16 - 24 = 52 - 24 = 28$$

$$BC = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

3 - أ - لدينا : باستعمال علاقة شال  $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\overline{AB} + \overline{BD})(\overline{BA} + \overline{AC})$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\overline{AB} + \overline{AC})(-\overline{AB} + \overline{AC})$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = (\overline{AC} + \overline{AB})(\overline{AC} - \overline{AB})$$

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AC^2 - AB^2$$

ب - باستعمال الإسقاط لدينا

$$\overline{AD} \cdot \overline{BC} = \overline{HK} \cdot \overline{BC} = -HK \times BC$$

ج - بما أن  $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = AC^2 - AB^2$  و  $\overline{AD} \cdot \overline{BC} = -HK \times BC$  فإن :

$$-HK \times BC = AC^2 - AB^2$$

$$-HK \times 2\sqrt{7} = 4^2 - 6^2$$

$$-HK \times 2\sqrt{7} = -20$$

$$HK = \frac{10}{\sqrt{7}} \quad \text{إذن} \quad HK = \frac{-20}{-2\sqrt{7}}$$

### تمرين رقم 3:

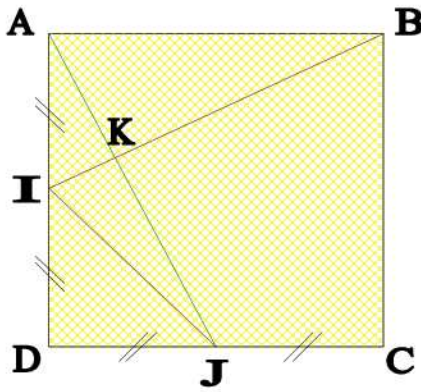
ليكن  $ABCD$  مربع طول ضلعه 4.

النقطتان  $I$  و  $J$  هما منتصفا القطعتين  $[AD]$  و  $[DC]$  على التوالي.

- 1 - أ - أحسب  $\overline{DJ} \cdot \overline{BA}$  و  $\overline{AD} \cdot \overline{AI}$ .
- ب - أحسب  $\overline{AJ} \cdot \overline{BI}$  و استنتج أن المستقيمين  $(AJ)$  و  $(BI)$  متعامدين.

2 - أحسب  $\cos(\overline{IJ}, \overline{IB})$ .

3 - لتكن  $K$  هي نقطة تقاطع المستقيمين  $(AJ)$  و  $(BI)$  بين أن  $BK - IK = \frac{6}{\sqrt{5}}$



تصحيح التمرين رقم 3 :

1 - أ - لدينا :  $\overline{AD} \cdot \overline{AI} = AD \times AI = 4 \times 2 = 8$

ولدينا :  $\overline{DJ} \cdot \overline{BA} = -DJ \times BA = -2 \times 4 = -8$

ب - لدينا حسب علاقة شال

$$\overline{AJ} \cdot \overline{BI} = (\overline{AD} + \overline{DJ}) \cdot (\overline{BA} + \overline{AI})$$

$$= \overline{AD} \cdot \overline{BA} + \overline{AD} \cdot \overline{AI} + \overline{DJ} \cdot \overline{BA} + \overline{DJ} \cdot \overline{AI}$$

$$= 0 + 8 - 8 + 0 = 0$$

بما أن  $\overline{AJ} \cdot \overline{BI} = 0$  فإن المستقيمين  $(AJ)$  و  $(BI)$  متعامدين .

2 - لنحسب المسافات  $IJ$  و  $IB$  و  $BJ$ .

$$BJ^2 = BC^2 + CJ^2$$

$$BJ^2 = 4^2 + 2^2$$

$$BJ^2 = 16 + 4$$

$$BJ^2 = 20$$

$$BJ = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$IB^2 = IA^2 + AB^2$$

$$IB^2 = 2^2 + 4^2$$

$$IB^2 = 4 + 16$$

$$IB^2 = 20$$

$$IB = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$IJ^2 = ID^2 + DJ^2$$

$$IJ^2 = 2^2 + 2^2$$

$$IJ^2 = 4 + 4$$

$$IJ^2 = 8$$

$$IJ = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$BJ^2 = IB^2 + IJ^2 - 2 \times IB \times IJ \times \cos(\overline{IJ}, \overline{IB})$$

بتطبيق مبرهنة ألكاشي :

$$(2\sqrt{5})^2 = (2\sqrt{5})^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2 \times 2\sqrt{5} \times 2\sqrt{2} \times \cos(\overline{IJ}, \overline{IB})$$

$$20 = 20 + 8 - 8\sqrt{10} \times \cos(\overline{IJ}, \overline{IB})$$

$$8\sqrt{10} \times \cos(\overline{IJ}, \overline{IB}) = 28 - 20$$

$$\sqrt{10} \times \cos(\overline{IJ}, \overline{IB}) = 1$$

$$\cos(\overline{IJ}, \overline{IB}) = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$(BK - IK)(BK + IK) = BK^2 - IK^2$$

3 - لدينا :

$$BK - IK = \frac{BK^2 - IK^2}{BK + IK} \text{ إذن}$$

$$BK - IK = \frac{(AB^2 - AK^2) - (AI^2 - AK^2)}{BI}$$

$$BK - IK = \frac{AB^2 - AI^2}{BI} = \frac{4^2 - 2^2}{2\sqrt{5}} = \frac{12}{2\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

تمرين رقم 4 :

ABC مثلث بحيث  $AB = 4$  و  $AC = 3$  و  $\cos(\widehat{BAC}) = \frac{5}{6}$ .

1 - أحسب  $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ .

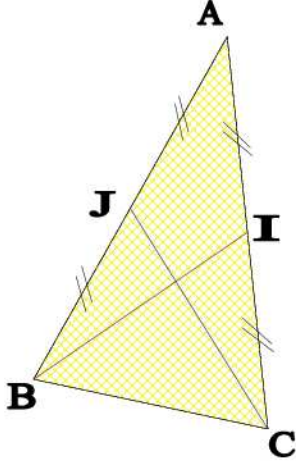
2 - أحسب المسافة BC.

3 - أ - لتكن I منتصف [AC] و J منتصف [AB].

بين أن :  $\overline{BI} \cdot \overline{CJ} = \frac{5}{4} \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2)$

ب - استنتج أن المستقيمين  $(BI)$  و  $(CJ)$ .

تصحيح التمرين رقم 4 :



1 - لدينا :  $\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC})$

$$= 4 \times 3 \times \frac{5}{6} = \frac{60}{6} = 10$$

2 - باستعمال مبرهنة ألكاشي :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

$$BC^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \times 6 = 16 + 9 - 12 = 13$$

$$BC = \sqrt{13}$$

3 - أ -  $\overline{BI} \cdot \overline{CJ} = (\overline{BA} + \overline{AI}) \cdot (\overline{CA} + \overline{AJ})$

$$= \left( -\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AC} \right) \cdot \left( -\overline{AC} + \frac{1}{2}\overline{AB} \right)$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{AC} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{AC} \cdot \overline{AB}$$

$$= \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{4}\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2}(\overline{AB} \cdot \overline{AB} + \overline{AC} \cdot \overline{AC})$$

$$= \frac{5}{4}\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$$

ب - لدينا :  $\overline{BI} \cdot \overline{CJ} = \frac{5}{4}\overline{AB} \cdot \overline{AC} - \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2)$

$$= \frac{5}{4} \times 10 - \frac{1}{2}(4^2 + 3^2)$$

$$= \frac{50}{4} - \frac{1}{2} \times 25$$

$$= \frac{50}{4} - \frac{25}{2} = 0$$

إذن المستقيمان (BI) و (CJ) متعامدان .