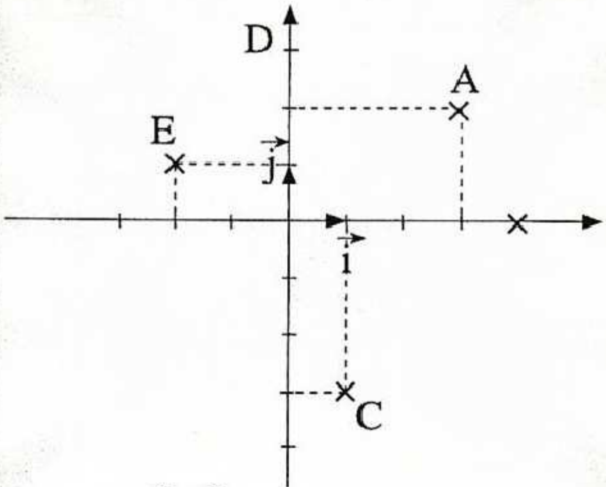
تمارين وحلولها

تمرين 1

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 – حدد إحداثياتي النقط E , D , C , B , A



2 – مثل في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ النقط التالية :

$A(2 , -3)$ $B(\frac{3}{2} , \frac{1}{4})$

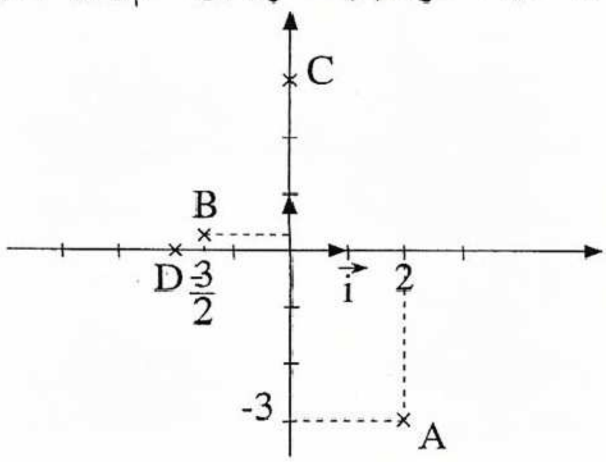
$C(0 , 3)$ $D(-2 , 0)$

الجواب :

1 – لدينا $C(1 , -3)$ ، $B(4 , 0)$

$A(3 , 2)$ ، $D(0 , 3)$ ، $E(-2 , 1)$

2 – لدينا المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i} , \vec{j})$



تمرين 2 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O , \vec{i} , \vec{j})$

1 – حدد إحداثيتي المتجهة $\overrightarrow{AB}$ في كل حالة :

أ – $A(1 , 3)$ $B(-2 , 1)$

ب – $A(-2 , -1)$ $B(0 , 3)$

2 – حدد إحداثيتي منتصف القطعة [AB] في كل حالة

أ – $A(1 , 3)$ $B(-2 , 1)$

ب – $A(\frac{-2}{3} , 2)$ $B(0 , \frac{1}{2})$

الجواب :

أ- لدينا $A(1 , 3)$; $B(-2 , 1)$

إذن $\overrightarrow{AB}(-2 - 1 , 1 - 3)$

ومنه $\overrightarrow{AB}(-3 , -2)$

ب – لدينا $A(-2 , -1)$ $B(0 , 3)$

إذن $\overrightarrow{AB}(0 - (-2) ; 3 - (-1))$

إذن $\overrightarrow{AB}(2 , 4)$

2 – أ – لدينا

$B(1 , 3)$ $A(-2 , 1)$

ليكن I منتصف القطعة [AB] إذن :

$I(\frac{1 + (-2)}{2} ; \frac{3 + 1}{2})$

أي أن $I(-\frac{1}{2} , 2)$

ب – لدينا $B(0 , \frac{1}{2})$ $A(-\frac{2}{3} , 2)$

ليكن J منتصف [AB]

إذن $J\left(\dfrac{-\frac{2}{3}+0}{2} ; \dfrac{2+\frac{1}{2}}{2}\right)$

أي أن $J(-\frac{1}{3} ; \frac{5}{4})$

تمرين 3 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقط.

$C(4 , 2)$, $B(-7 , 4)$, $A(5 , -2)$

1 – حدد إحداثيات المتجهات $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}$

2 – ليكن I منتصف [AC] و J منتصف [BC]

حدد احداثيتي كل من I و J

3 – حدد إحداثيتي النقطة D حيث الرباعي ABCD متوازي أضلاع.

4 – حدد إحداثيتي النقطة E حيث B منتصف القطعة [EA]

5 – حدد إحداثيتي النقطة F حيث C مماثلة F بالنسبة لـ A

الجواب :

1 – لدينا : $B(-7 , 4)$ و $A(5 , -2)$

إذن : $\overrightarrow{AB}(-7 -5 ; 4 -(-2))$

أي أن $\boxed{\overrightarrow{AB}(-12 , 6)}$

لدينا $B(-7 , 4)$ و $C(4 , 2)$

$\overrightarrow{CB}(-7 - 4 ; 4 - 2)$

إذن $\boxed{\overrightarrow{CB}(-11 , 2)}$

بما أن $A(5 , -2)$ و $C(4 , 2)$

فإن $\overrightarrow{CA}(5 - 4 ; -2 - 2)$

$\boxed{\overrightarrow{CA}(1 , -4)}$

2 – لدينا $A(5 , -2)$

$C(4 , 2)$ إذن

$I\left(\dfrac{5+4}{2} ; \dfrac{-2+2}{2}\right)$

$I\left(\frac{1}{2} ; 0\right)$

لدينا $\begin{cases} B(-7 , 4) \\ C(4 , 2) \end{cases}$ إذن

$J\left(\dfrac{-7+4}{2} ; \dfrac{4+2}{2}\right)$

أي أن $\boxed{J\left(-\frac{3}{2} ; 3\right)}$

3 – نعتبر $B(x , y)$

لدينا ABCD متوازي أضلاع

يعني أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

لدينا $\overrightarrow{AB}(-12 , 6)$ و $\overrightarrow{DC}(4 - x , 2 - y)$

بما أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ فإن

$\begin{cases} 4 - x = -12 \\ 2 - y = 6 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x = 16 \\ y = -4 \end{cases}$

إذن $\boxed{D(16 , -4)}$

4 – لدينا B منتصف القطعة [EA]

إذن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

نعتبر $E(x , y)$

لدينا $\overrightarrow{BE}(x + 7 ; y - 4)$ و $\overrightarrow{AB}(-12 ; 6)$

بما أن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BE}$

فإن $\begin{cases} x + 7 = -12 \\ y - 4 = 6 \end{cases}$ إذن

إذن $\begin{cases} x = -19 \\ y = 10 \end{cases}$ $\boxed{E(-19 , 10)}$

5 – لدينا C مماثلة F بالنسبة لـ A

يعني أن A منتصف القطعة [CF]

أي أن $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AF}$

ليكن $F(x , y)$

لدينا $\overrightarrow{CA}(1 , -4)$ و $\overrightarrow{AF}(x - 5 , y + 2)$

بما أن $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AF}$ فإن

$\begin{cases} x - 5 = 1 \\ y + 2 = -4 \end{cases}$ أي أن $\begin{cases} x = 6 \\ y = -6 \end{cases}$

ومنه $\boxed{E(6 , -6)}$

تمرين 4 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i} , \vec{j})$

نعتبر النقط $A(2 , 3)$ و$B(4 , 1)$ و $C(3 , 1)$

1 – حدد زوجي إحداثيتي النقطة D حيث :

$\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

2– حدد زوج احداثيتي النقطة E بحيث :

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

الجواب :

1 – لدينا $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

إذن

$\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OC}$

يعني أن $\overrightarrow{OD} = 3\overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AO}$

$= -2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

إذن $\overrightarrow{OD} = -2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$

$= -2(2\vec{i} + 3\vec{j}) + 2(4\vec{i} + \vec{j}) + 3\vec{i} + \vec{j}$

$= -4\vec{i} - 6\vec{j} + 8\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{i} + \vec{j}$

إذن $\overrightarrow{OD} = 7\vec{i} - 3\vec{j}$

$\boxed{D(7 , -3)}$

2 – لدينا

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$

ليكن $E(x , y)$

لدينا $\overrightarrow{AB}(2 , -2)$

و $\overrightarrow{CE}(x - 3 , y - 1)$

بما أن $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$ فإن

$\begin{cases} x - 3 = 2 \\ y - 1 = -2 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases}$

إذن $\boxed{E(5 , -1)}$

تمرين 5:

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i} , \vec{j})$

نعتبر النقط :

$A(1 , 3)$ و $B(-1 , -\frac{3}{2})$ و $C(3 , \frac{3}{2})$

$D(2 , -\frac{3}{4})$

$E(2 , m)$ حيث $m \in \mathbb{R}$

1 – ادرس استقامية النقط A و B و C

2 – هل $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتان ؟

3 – حدد قيمة العدد الحقيقي m لكي تكون النقط B و C و E مستقيمية

4 – حدد احداثيتي النقطة G مركز ثقل المثلث ABC

الجواب :

1 – لدينا $\overrightarrow{AC}(2\,,-\frac{3}{2})$ و $\overrightarrow{AB}(-2\,,-\frac{9}{2})$

$$\det(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{3}{2} \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-\frac{3}{2}) - 2\times(-\frac{9}{2})$$
$$= 3+9$$
$$\neq 0$$

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ غير مستقيميتان وبالتالي النقط A و B و C غير مستقيمية

– 2

لدينا $\overrightarrow{AB}(-2\,,-\frac{9}{2})$ و $\overrightarrow{CD}(-1\,,-\frac{9}{4})$

$$\det(\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{CD}) = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{9}{2} & -\frac{9}{4} \end{vmatrix}$$

$$= (-2)(-\frac{9}{4}) - (-1)(-\frac{9}{2})$$
$$= \frac{9}{2} - \frac{9}{2}$$
$$= 0$$

إذن المتجهتان $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CD}$ مستقيميتين.

3 – لدينا $\overrightarrow{BE}(2\,,m+\frac{3}{2})$ و $\overrightarrow{CD}(4\,,3)$

B و C و E مستقيمية تعني أن $\overrightarrow{BE}$ و $\overrightarrow{BC}$ مستقيميتان أي أن :

$$\det(\overrightarrow{BE}\,,\overrightarrow{BC}) = 0$$

أي أن
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ m+\frac{3}{2} & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$4(m+\frac{3}{2}) - 3\times 3 = 0$$
$$4m+6-9=0$$
$$4m=3$$

إذن $\boxed{m=\frac{3}{4}}$

4 - G مركز ثقل المثلث ABC تعني أن :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$$

أي :

$$\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

أي أن $3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$$\overrightarrow{OG}=\frac{3}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$
$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\vec{i}+3\vec{j}-\vec{i}-\frac{3}{2}\vec{j}+3\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(3\vec{i}+3\vec{j}\right)$$
$$=\vec{i}+\vec{j}$$

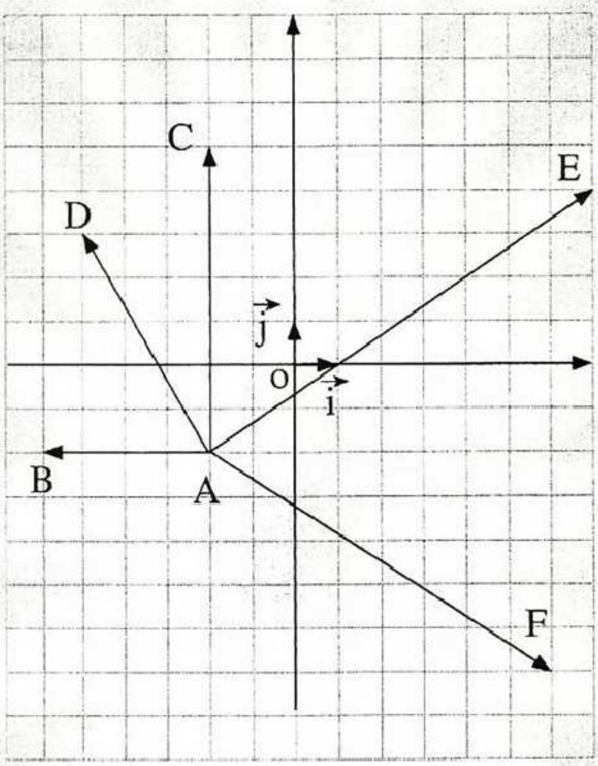
إذن $\overrightarrow{OG}=1.\vec{i}+1.\vec{j}$

أي أن $\boxed{G(1\,,1)}$

تمرين 6 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i}\,,\vec{j}\,)$

نعتبر الشكل التالي :



إقرأ على الشكل احداثيات المتجهات التالية :

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$

$\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{DC}$

الجواب :

حسب الشكل لدينا :

$\overrightarrow{AC}(0\,,7)$ $\quad$ $\overrightarrow{AB}(-4\,,0)$

$\overrightarrow{AE}(9\,,6)$ $\quad$ $\overrightarrow{AD}(-3\,,5)$

$\overrightarrow{DC}(3\,,2)$ $\quad$ $\overrightarrow{AF}(9\,,-4)$

$\overrightarrow{EF}(0\,,-10)$

تمرين 7 :

ABCD متوازي الأضلاع E و F نقطتان بحيث :

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

1 – لماذا $(A\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD})$ معلم ؟ (علل جوابك)

2 – في المعلم $(A\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD})$ حدد احداثيات النقط $A\,,B\,,C\,,D\,,E\,,F$

الجواب :

لدينا ABCD متوازي الأضلاع فعلي إذن النقط A و B و D و غير مستقيمية

وبالتالي $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AD}$ غير مستقيميان إذن المثلوث $(\vec{A}\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD})$ معلم.

2 – بما أن A أصل المعلم $(\vec{A}\,,\overrightarrow{AB}\,,\overrightarrow{AD})$

فإن $A(0\,,0)$

لدينا $\overrightarrow{AB} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AD}$

إذن $B(1\,,0)$

بما أن $\overrightarrow{AD} = 0\,\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD}$

فإن $D(0\,,1)$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$
$$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{AC} = 1.\overrightarrow{AB} + 1.\overrightarrow{AD}$$

ومنه $C(1\,,1)$

لدينا
$$\overrightarrow{AE} = 2\,\overrightarrow{AB}$$
$$= 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$$
$$= 2\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC}$$
$$= -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$$

إذن $\overrightarrow{AE} = 0\,\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

أي أن $\boxed{E\,(0\,,2)}$

لدينا $\overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

إذن

$$\boxed{F\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)}$$

تمرين 8 :

ABC مثلثا E و F نقطتين بحيث :

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BC}$$

نعتبر المستوى (P) منسوب إلى المعلم

$$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$$

1 – حدد احداثيات النقط

F , E , C , B , A

2 – بين أن النقط A و C و F مستقيمية

3 – حدد احداثيتي النقطة D مركز ثقل المثلث BEF

الجواب :

1 – لدينا $A(0, 0)$

لدينا $\overrightarrow{AB} = 1.\overrightarrow{AB} + 0.\overrightarrow{AC}$

إذن $B(1, 0)$

بما أن $\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$

فإن $C(0, 1)$

لدينا $\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{BC}$

أي أن $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC}$

يعني أن :

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BA}$$
$$\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$$

إذن $\boxed{E(-2, 3)}$

$$\overrightarrow{EF} = 2\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB}$$
$$\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$$
$$= \cancel{2\overrightarrow{AB}} - \cancel{2\overrightarrow{AB}} + 3\overrightarrow{AC}$$
$$= 3\overrightarrow{AC}$$

إذن $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AC}$

$$\boxed{F(0, 3)}$$

2 - لدينا

$F(0, 3) \quad C(0, 1) \quad A(0, 0)$

$\overrightarrow{AC}(0, 1) \qquad \overrightarrow{AF}(0, 3)$

$$\det(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AC}) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \times 0 - 3 \times 0$$
$$= 0$$

إذن $\overrightarrow{AF}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان وبالتالي A و C و F نقط مستقيمية.

3 - D مركز ثقل المثلث BEF

تعني أن

$$\overrightarrow{DE} + \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{DB} = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \vec{0}$$

ومنه $3\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB}$

أي أن $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AB}\right)$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\left(-2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right)$$
$$= \frac{1}{3}\left(-\overrightarrow{AB} + 6\overrightarrow{AC}\right)$$

$= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

إذن $D(-\frac{1}{3}, 2)$

تمرين 9 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر النقطتين $A(2,3)$ و $B(-1,1)$

1 – اعط معادلة ديكارتية للمستقيم (AB)

2 – هل النقطة $C(4,1)$ تنتمي إلى (AB) ؟

3 – حدد العدد الحقيقي m بحيث تكون النقطة $D(m,1)$ تنتمي إلى (AB)

الجواب :

1 – لدينا : $A(2,3)$ و $B(-1,1)$

إذن $\overrightarrow{AB}(-3,-2)$ متجهة موجهة لـ (AB)

$(AB) : -2x + 3y + C = 0$

وبما أن $A(2,3) \in (AB)$

فإن $-2 \times 2 + 3 \times 3 + C = 0$

أي أن $C = -5$

ومنه $(AB) : -2x + 3y - 5 = 0$

أي أن $\boxed{(AB) : -2x + 3y - 5 = 0}$

2 - $C(4,1) \in (AB)$ تعني أن

$2 \times 4 - 3 \times 1 - 5 = 0$

أي أن $8 - 3 - 5 = 0$

$8 - 8 = 0$

$0 = 0$

إذن $C(4,1) \in (AB)$

3 - $D(m,1) \in (AB)$ تكافئ

$2 \times m - 3 \times 1 + 5 = 0$

أي أن $2m + 2 = 0$

ومنه $m = -1$

تمرين 10 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (Δ) في الحالات التالية :

1 - المستقيم (Δ) يمر من النقطة $A(-2,5)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}(-3,1)$

2 - المستقيم (Δ) يمر من النقطتين $E(-1,0)$ و $F(1,1)$

3 - المستقيم (Δ) يمر من النقطة $I(0,3)$ ومعامله الموجه $m = -2$

4 - المستقيم (Δ) يمر من النقطة $C(2,-1)$ وموازي للمستقيم (D) ذي المعادلة :

$2x - 7y + 1 = 0$

الجواب :

1 - $A(-2,5)$; $\vec{u}(-3,1)$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (\Delta)$ تعني أن $\overrightarrow{AM}$ و $\vec{u}$ مستقيميتان أي أن $\det(\overrightarrow{AM},\vec{u}) = 0$

أي أن $\begin{vmatrix} x+2 & -3 \\ y-5 & 1 \end{vmatrix} = 0$

أي أن $1(x+2) - (-3)(y-5) = 0$

$x + 2 + 3y - 15 = 0$

أي أن $\boxed{(\Delta) : x + 3y - 13 = 0}$

2 - $E(-1 , 0)$ و $F(1 , 1)$

لدينا $\overrightarrow{EF}(2 , 1)$ متجهة موجهة لـ (EF)

لدينا $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (EF)$ أي أن

$\det(\overrightarrow{EM} , \overrightarrow{EF}) = 0$

أي أن $\begin{vmatrix} x+2 & 2 \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0$

تكافئ $1(x + 1) - 2 \times y = 0$

$\boxed{(EF) : x - 2y + 1 = 0}$

3 - نعلم أن

$(\Delta) : y = mx + p$

بما أن $m = -2$ فإن :

$y = -2x + p$

لدينا $I(0 , 3) \in (\Delta)$ إذن

$3 = -2 \times 0 + p$

إذن $p = 3$

ومنه $\boxed{(\Delta) : y = -2x + 3}$

4 - بما أن (Δ) و (D) متوازيان فإن لهما نفس المتجهة الموجهة وبالتالي :

$(\Delta) : 2x - 7y + C = 0$

لدينا $C(2 , -1) \in (\Delta)$ إذن

$2 \times 2 - 7(-1) + C = 0$

$4 + 7 + C = 0$

$C = -11$

ومنه $\boxed{(\Delta) : 2x - 7y - 11 = 0}$

تمرين 11 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i} , \vec{j})$

حدد تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) في الحالات التالية :

1 - المستقيم (D) يمر من النقطة $A(2 , -3)$ وموجه بالمتجهة $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

2 - المستقيم (D) يمر من النقطتين $B(4 , 3)$ و $C(2 , -1)$

3 - المستقيم (D) يمر من النقطة $D(2 , 2)$ والموازي للمستقيم (Δ) حيث : $(\Delta) : 2x + y - 3 = 0$

4 - المستقيم (D) يمر من النقطة $E(2 , 5)$ ومعامله الموجه هو $m = 4$

الجواب :

1 - $A(2 , -3)$; $\vec{u}(0 , 4)$

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تكافئ

$$\begin{cases} x = 2 + 0 \times t \\ y = -3 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

إذن $\boxed{(D) \begin{cases} x = 2t \\ y = -3 + 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$

2 - لدينا : $B(4 , 3)$ و $C(2 , -1)$

إذن $\overrightarrow{BC}(-2 , -4)$ متجهة موجهة لـ (D)

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تعني أن

$$\begin{cases} x = 4 - 2 \times t \\ y = 3 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(D) \begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 3 - 4t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

3 - لدينا $(\Delta) : 2x + y - 3 = 0$

إذن $\vec{u}(-1 , 2)$ متجهة موجهة لـ (Δ)

وبما أن $(D) // (\Delta)$ فإن $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ متجهة موجهة لـ (D)

ولدينا $D(2 , 2) \in (D)$ إذن

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تعني أن

$$\begin{cases} x = 2 - 1 \times t \\ y = 2 + 2 \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\boxed{(D) \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 2 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

4 - لدينا $m = 4$ معامل موجه لـ (D)

إذن $\vec{u}(1 , 4)$ متجهة موجهة لـ (D)

ولدينا $E(2 , 5) \in (D)$ إذن

$M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تكافئ :

$$\begin{cases} x = 2 + 1 \times t \\ y = 5 + 2 \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أي أن

$$\boxed{(D) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 5 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

تمرين 12:

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 - اعط معادلة ديكارتية للمستقيم (D) المعرف بـ

$$(D) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

2 - اعط تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D) المعرف ب

$$(D) : 3x + 2y - 4 = 0$$

الجواب :

لدينا :

$$(D) \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 - 5t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

إذن $\vec{u}(1 , -5)$ متجهة موجهة لـ (D)

و $A(2 , 3)$ نقطة من المستقيم (D).

إذن $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تكافئ

$$\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$$

أي أن
$$\begin{vmatrix} x - 2 & 1 \\ y - 3 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

تكافئ $-5(x - 2) - 1(y - 3) = 0$

إذن $-5x + 10 - y + 3 = 0$

$(D) : -5x - y + 13 = 0$

إذن $\boxed{(D) : 5x + y - 13 = 0}$

2 - لدينا $(D) : 3x + 2y - 4 = 0$

إذن $\vec{u}(-2 , 3)$ متجهة موجهة لـ (D).

لدينا كذلك $B(0 , 2)$ نقطة من المستقيم (D)

إذن $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \in (D)$ تكافئ

$$\begin{cases} x = 0 - 2 \times t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

أي أن

$$\boxed{(D) : \begin{cases} x = -2t \\ y = 2 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}}$$

تمرين 13 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (D) في الحالات التالية :

1 - المستقيم (D) يمر من النقطة $A(0,1)$ وعمودي على المستقيم (Δ)

حيث $(\Delta) : 2x + y + 4 = 0$

2 - المستقيم (D) عمودي على المستقيم (AB) حيث $A(-1,2)$ و $B(2,1)$ ويمر من $E(2,-3)$

3 - المستقيم (D) يمر من النقطة $C(4,3)$ وعمودي على المستقيم $(\Delta) : y = 2$

الجواب :

1 - لدينا $(\Delta) : 2x + y + 4 = 0$

ومنه $(\Delta) : \quad y = -2x - 4$

وبالتالي : $m = -2$ معاملا موجها لـ (Δ)

ليكن m' معاملا موجها لـ (D)

نعلم $(D) \perp (\Delta)$ إذن $m \times m' = -1$

أي أن $(-2) \times m' = -1$

$$m' = \frac{1}{2}$$

ومنه $(D) : \quad y = \frac{1}{2}x + p$

لدينا $A(0, 1) \in (D)$ إذن :

$$1 = \frac{1}{2} \times 0 + p$$

إذن : $p = 1$

ومنه $\boxed{(D) : \quad y = \frac{1}{2}x + 1}$

$$(D) : x - 2y + 2 = 0$$

2 - لدينا $A(-1,2)$ و $B(2,1)$

إذن : $\overrightarrow{AB}(3, -1)$ متجهة موجهة لـ (AB)

ومنه $m' = -\frac{1}{3}$ معاملا موجها لـ(AB)

ليكن m' معاملا موجها لـ (D)

إذن $m \times m' = -1$ لأن $(D) \perp (\Delta)$

ومنه $m' = 3$

وبالتالي : $y = 3x + p$

لدينا $E(2, -3) \in (D)$ إذن :

$$-3 = 3 \times 2 + p$$

إذن : $p = -9$

ومنه $\boxed{(D) : \; y = 3x - 9}$

إذن : $\boxed{(D) : \; 3x - y - 9 = 0}$

3 - لدينا $(\Delta) : y = 2$ إذن (Δ) يوازي محور الأفاصيل وبما أن $(D) \perp (\Delta)$ فإن (D) يوازي محور الأراتيب.

وبالتالي $(D) : \; x = k$

وبما أن (D) يمر من النقطة $C(4, 3)$ فإن :

$$(D) : \; x = 4$$

إذن : $\boxed{(D) : \; x = 4}$

تمرين 14 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

نعتبر مجموعة المستقيمات (D_m) المعرف بـ :

$$(D_m) : (m+1).x + 2my + 1 - 3m = 0$$

حيث $m \in \mathbb{R}$

1 - حدد العدد m لكي يمر المستقيم (D_m) من أصل المعلم O

2 - حدد m لكي يمر (D_m) من $A(2,-1)$

3 - حدد العدد m حتى يكون (D_m) موازيا لمحور الأفاصيل.

4 - حدد العدد m حتى يكون (D_m) موازيا لمحور الأراتيب.

5 - حدد العدد m لكي يكون (D_m) موازيا للمستقيم : $(\Delta) : 2x - 3y + 5 = 0$

6 - بين أن المستقيمات (D_m) تمر كلها من نقطة واحدة I وحددها.

الجواب :

1 - لدينا

$$(D_m) : (m+1).x + 2my + 1 - 3m = 0$$

$O(0,0) \in (D_m)$ تكافئ

$$(m+1).0 + 2m \times 0 + 1 - 3m = 0$$

أي أن $1 - 3m = 0$

$$m = \frac{1}{3}$$

ومنه

$$\boxed{m = \frac{1}{3}}$$

2 - لدينا

$$(D_m) : (m+1).x + 2my + 1 - 3m = 0$$

$A(2,-1) \in (D_m)$ تكافئ

$$(m+1) \times 2 + 2m \times (-1) + 1 - 3m = 0$$

أي أن $2m + 2 - 2m + 1 - 3m = 0$

أي أن $3 - 3m = 0$

$$\boxed{m = 1}$$

3 - (D_m) يوازي محور الأفاصيل

تكافئ : $m + 1 = 0$

$$\boxed{m = -1}$$

4 - (D_m) يوازي محور الأراتيب

تكافئ : $2m = 0$

$$\boxed{m = 0}$$

5 - لدينا $\vec{u}(3,2)$ متجهة موجهة لـ (Δ)

$\overrightarrow{U_m}(3,2)$ (Δ) متجهة موجهة لـ (D_m)

$(\Delta)//(D)$ تكافئ :

$$\det(\vec{U}, \overrightarrow{U_m}) = 0$$

أي أن
$$\begin{vmatrix} 3 & -2m \\ 2 & m+1 \end{vmatrix} = 0$$

$$3(m+1) - (-2m) \times 2 = 0$$

$$3m + 3 + 4 = 0$$

$$7m = -3$$

إذن :
$$\boxed{m = -\frac{3}{7}}$$

6 - لدينا

$$(D_m) : (m+1).x + 2my + 1 - 3m = 0$$

تكافئ : $mx + x + 2my + 1 - 3m = 0$

لكل m من $\mathbb{R}$

أي أن $(mx + 2my - 3m) + (x + 1) = 0$

لكل m من $\mathbb{R}$

ومنه $(x + 2y - 3)m + (x + 1) = 0$

لكل m من $\mathbb{R}$

ومنه $x + 1 = 0$ و $x + 2y - 3 = 0$

أي أن $x = -1$ و $-1 + 2y - 3 = 0$

إذن : $x = -1$ و $y = 2$

إذن المستقيمات (D_m) تمر كلها من نقطة واحدة

I حيث : $I(-1 , 2)$

تمرين 15 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O,\vec{i},\vec{j})$

ليكن (D) المستقيم المعرف ب :

$$(D) : 3x - 2y + 5 = 0$$

1 - حدد تقاطع (D) مع المستقيمات التالية

أ - $(D_1) : x = 3$

ب - $(D_2) : y = -2$

ج - $(D_3) : x + y - 1 = 0$

د - $(D_4) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

2 - حدد تقاطع (D) مع محوري المعلم.

الجواب :

1 - أ - $(D) : 3x - 2y + 5 = 0$

$(D_1) : x = 3$

زوج احداثي نقطة تقاطع (D) و (D_1) يحقق النظمة التالية :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x = 3 \end{cases}$$

إذن : $\begin{cases} x = 3 \\ 9 - 2y + 5 = 0 \end{cases}$

أي أن : $\begin{cases} x = 3 \\ y = 7 \end{cases}$

ومن (D) و(D_1) يتقاطعان في النقطة $I(3 , 7)$

ب - لدينا :

$(D) : 3x - 2y + 5 = 0$

$(D_2) : y = -2$

زوج احداثيي نقطة تقاطع (D) و(D_2) يحقق النظمة التالية :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ y = -2 \end{cases}$$

أي أن $\begin{cases} y = -2 \\ 3x + 4 + 5 = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$$

ومنه (D) و(D_2) يتقاطعان في النقطة :

$J(-3 , -2)$

ج - لدينا

$(D) : 3x - 2y + 5 = 0$

$(D_3) : x + y - 1 = 0$

لدينا $\vec{u}(2 , 3)$ متجهة موجهة لـ (D)

لدينا $v(-1 , 1)$ متجهة موجهة لـ (D_3)

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= 2 + 3 = 5 \neq 0$$

إذن (D) و(D_3) يتقاطعان في النقطة H حيث زوج احداثيتي يحقق :

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

أي أن
$$\begin{cases} y = -x + 1 \\ 3x - 2y + 5 = 0 \end{cases}$$

ومنه $3x - 2(-x+1) + 5 = 0$

أي أن $3x + 2x - 2 + 5 = 0$

$$5x + 3 = 0$$
$$x = -\frac{3}{5}$$

ومنه $y = \frac{8}{5}$

إذن (D) و(D_3) يتقاطعان في النقطة :

$$H(-\frac{3}{5}, \frac{8}{5})$$

تمرين 16 :

ABCD متوازي الأضلاع و E و F نقطتين من المستوى (P) حيث :

$$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{DC} \quad و \quad \overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}.\overrightarrow{BC}$$

نعتبر المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

1 – اكتب معادلة ديكارتية للمستقيم (AE)

2 – حدد احداثيتي النقطة F

3 – استنتج أن النقط A و E و F مستقيمية.

الجواب :

1 – لدينا $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ معلم.

$$\overrightarrow{DE} = \frac{2}{3}.\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$
$$\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AD}$$
$$= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$$

لأن ABCD متوازي الأضلاع

ومنه $E(\frac{2}{3}, 1)$

ولدينا $A(0, 0)$

إذن $\overrightarrow{AE}(\frac{2}{3}, 1)$ متجهة موجهة لـ (AE)

ومنه

$$(AE) : x - \frac{2}{3}y + c = 0$$

وبما أن $A(0,0) \in (AE)$ فإن

$$(AE) : x - \frac{2}{3}y = 0$$

أي أن $\boxed{(AE) : 3x - 2y = 0}$

2 – لدينا $\overrightarrow{BF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

أي أن $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

أي أن $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}$

$$= \overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$$

إذن $F(1, \frac{3}{2})$

3 – لدينا

$$(AE) : 3x - 2y = 0$$

و $F(1, \frac{3}{2})$

لدينا $F \in (AE)$ تكافئ

$3 \times 1 - 2 \times \frac{3}{2} = 0$

$3 - 3 = 0$

$0 = 0$

إذن $F \in (AE)$

أي أن النقط A و E و F مستقيمية.

تمرين 17 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1 – نعتبر (D) و (Δ) المستقيمين المعرفين بما يلي :

$$(D) \begin{cases} x = mt \\ y = -1 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

و

$$(\Delta) \quad mx + 4y - 3 = 0$$

حدد قيمة العدد الحقيقي m التي من أجلها يكون (D) و (Δ) متوازيين.

2 – نعتبر المستقيمين (D) و (D_α) المعرفين بما يلي :

$$(D_\alpha) \begin{cases} x = \alpha - t \\ y = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

$$(D) \begin{cases} x = -2 + 2k \\ y = -2k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}$$

أ – بين أن $(D_\alpha) /\!/ (D)$

ب – حدد قيمة α لكي يكون $(D_\alpha) = (D)$

الجواب :

1 – $\vec{u}(m , -1)$ متجهة موجهة لـ (D)

و $\vec{v}(-4 , m)$ متجهة موجهة لـ (Δ)

$(D) /\!/ (\Delta)$ تكافئ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان أي

أن $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$

$$\begin{vmatrix} m & -4 \\ -1 & m \end{vmatrix} = 0$$

يعني $m^2 - 4 = 0$

أي $m^2 = 4$

ومنه $m = 2$ أو $m = -2$

2 –

أ – لدينا $\vec{u}(-1 , 1)$ متجهة موجهة لـ (D_α)

$\vec{v}(2 , -2)$ متجهة موجهة لـ (D)

وبما أن $\vec{v} = -2\vec{u}$

فإن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان وبالتالي $(D) /\!/ (D_\alpha)$

ب – لدينا $A(-2 ,0) \in (D)$

لكي يكون $(D) = (D_\alpha)$ يجب أن تكون :

$$\begin{cases} -2 = \alpha - t \\ 0 = t \end{cases}$$

إذن $-2 = \alpha - 0$

$$\boxed{\alpha = -2}$$

تمرين 18 :

I) ABC مثلث و M نقطة من المستوى (P)

حيث : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

1 - بين أن المتجهتين $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BM}$ مستقيميتان

2 - لتكن N النقطة بحيث :

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$$

بين أن النقط N وB و M مستقيمية

II) المستوى (P) منسوب إلى المعلم $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

1 – حدد احداثيات A ; B ; C ; M و N

2 – بين أن الرباعي $ANMC$ متوازي أضلاع

3 – اعط معادلة ديكارتية لــ (BC) ثم تحقق من أن $S(\frac{3}{4},\frac{1}{4})\in(BC)$

4 – بين أن المستقيم (SM) يوازي المستقيم (AB)

الجواب :

1 – لدينا $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

إذن $\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

ومنه $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

أي أن $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

إذن $\overrightarrow{BM}$ و $\overrightarrow{AC}$ مستقيميتان

2 – لدينا $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ومنه $\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{BA}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

أي أن $\overrightarrow{BN}=-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

إذن $\overrightarrow{BN}=-3\times\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}\right)$

$\overrightarrow{BN}=-3\times\overrightarrow{BM}$

$\overrightarrow{BN}=-3\overrightarrow{BM}$

إذن النقط B و N و M مستقيمية

II) لدينا $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD})$ معلم

1- $A(0,0)$ و $B(1,0)$ و $B(0,1)$

وبما أن $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$

فإن $M(1,\frac{1}{4})$

وبما أن $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

فإن $N(1,-\frac{3}{4})$

2 – لدينا $\overrightarrow{AC}(0,1)$

و $\overrightarrow{NM}(0,1)$

ومنه الرباعي $ANMC$ متوازي الأضلاع.

3 – لدينا $B(1,0)$ $\overrightarrow{BC}(-1,1)$

إذن (BC) $x+y-c=0$

$B(1,0)\in(BC)$ تكافئ

$1+0+c=0$

$c=-1$

إذن $\boxed{(BC): x+y-1=0}$

$S(\frac{3}{4},\frac{1}{4})$

$S(\frac{3}{4},\frac{1}{4})\in(BC)$ تكافئ $\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-1=0$

$1-1=0$

$0=0$

إذن $S(\frac{3}{4},\frac{1}{4})\in(BC)$

4 – لدينا

$\overrightarrow{AB}(1,0)$ و $\overrightarrow{SM}(\frac{1}{4},0)$

$$\det(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{SM})=\begin{vmatrix}1 & \frac{1}{4}\\ 0 & 0\end{vmatrix}=0$$

إذن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{SM}$ مستقيميتان ومنه :

ومنه $(SM)/\!/(AB)$

تمرين 19 :

ABCD متوازي الأضلاع E و F نقطتان من (P) حيث

$\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$ و $3\overrightarrow{FD} - 5\overrightarrow{FC} = \vec{0}$

1 – انشئ الشكل

2 – المستوى (P) منسوب إلى المعلم $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

أ – حدد احداثيات النقط C و E و F

ب – حدد احداثيتي النقطة I مركز المتوازي الأضلاع ABCD

ج – بين أن : $2x - 9y + 4 = 0$ معادلة ديكارتية للمستقيم (EF)

3 – أ – اكتب معادلة ديكارتية لـ (AC)

ب – ادرس وحدد تقاطع المستقيمين (AC) و (EF)

الجواب :

1 – الانشاء :

لدينا $\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$

أي أن $\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$

$$3\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CB}$$

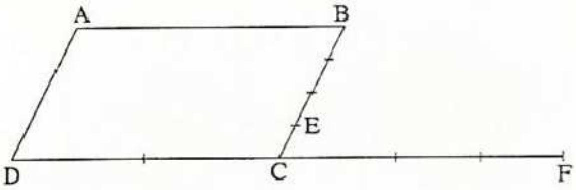
$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$$

$3\overrightarrow{FD} - 5\overrightarrow{FC} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{FC} + 3\overrightarrow{CD} - 5\overrightarrow{FC} = \vec{0}$

$$2\overrightarrow{FC} = 3\overrightarrow{CD}$$

$$\overrightarrow{CF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{CD}$$



2 – لدينا ABCD متوازي الأضلاع

إذن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

إذن $C(1, 1)$

$\overrightarrow{EB} + 2\overrightarrow{EC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{EA} = -\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}$

$3\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

$= 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

إذن $E(1, \frac{2}{3})$

لدينا

$3\overrightarrow{FD} - 5\overrightarrow{FC} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{FA} + 3\overrightarrow{AD} - 5\overrightarrow{FA} - 5\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{AF} = -3\overrightarrow{AD} + 5\overrightarrow{AC}$

$= -3\overrightarrow{AD} + 5\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB} + 5\overrightarrow{AD}$

$F(\frac{5}{2}, 1)$

ب – I مركز ABCD إذن I منتصف [AC]

لدينا $A(0, 0)$ و $C(1, 1)$

إذن $C(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

ج – لدينا : $E(1, \frac{2}{3})$ و $F(\frac{5}{2}, 1)$

لدينا : $\overrightarrow{EF}\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{3}\right)$

لدينا $(AE) : \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y + c = 0$

تكافئ $E\left(1, \frac{2}{3}\right) \in (EF)$

$$\frac{1}{3}x - \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} + c = 0$$

$$c = \frac{2}{3}$$

$$(EF) : \frac{1}{3}x - \frac{3}{2}y + \frac{2}{3} = 0$$

$$(EF) : 2x - 9y + 4 = 0$$

3 – أ – لدينا $\overrightarrow{AC}\,(1, 1)$

$$(AC) : ax - by + c = 0$$

$$(AC) : x - y + c = 0$$

تكافئ $A(0 , 0) \in (BC)$

$$C = 0$$

إذن $(AC) : x - y = 0$

ب – لدينا : $(AC) : x - y = 0$

$$(EF) : 2x - 9y + 4 = 0$$

لدينا

$$\det\left(\overrightarrow{AC} , \overrightarrow{EF}\right) = \begin{vmatrix} 1 & -9 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -2 + 9 = 7 \neq 0$$

إذن (AC) و (EF) متقاطعان زوج احداثيتي نقطة تقاطع (AC) و (EF) يحقق النظمة التالية

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ 2x + 9y + 4 = 0 \end{cases}$$

أي أن

$$\begin{cases} x - y \\ 2x - 9y + 4 = 0 \end{cases}$$

$$2x - 9x + 4 = 0$$

$$-7x + 4 = 0$$

$$x = \frac{4}{7}$$

ومنه $y = \frac{4}{7}$

$$(EF) \cap (AC) = \left\{ J\left(\frac{4}{7} , -\frac{4}{7}\right) \right\}$$

تمرين 20 :

المستوى (P) منسوب إلى معلم $(O, \vec{i} , \vec{j})$

نعتبر : $A(2 , -1)$ $B(1, 2)$ $C(-2 , 1)$

1 – اكتب معادلات متواسطات المثلث ABC

2 – بين تحليليا أن هذه المتوسطات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة G يتم تحديد احداثيتها.

الجواب :

1 – ليكن I منتصف القطعة $[AB]$

$$I\left(\frac{3}{2} , \frac{1}{2}\right)$$

المتوسط (IC)

لدينا $\overrightarrow{IC}\left(\frac{3}{2} , \frac{1}{2}\right)$

إذن $(IC) : \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}y + C = 0$

تكافئ $C(-2 , 1) \in (IC)$

$$(IC) \ : \ 1 + \frac{7}{2} + C = 0$$

$$C = -\frac{5}{2}$$

$$(IC) \ : \ \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}y - \frac{5}{2} = 0$$

أي أن

$$\boxed{(IC) \ : \ x + 7y - 5 = 0}$$

ليكن J منتصف القطعة $[AC]$

$J(0\,,0)$

<u>المتوسط</u> (JB)

لدينا $\overrightarrow{JB}\,(1\,,2)$

إذن $(BJ) : 2x - y + C = 0$

لدينا $J(0\,,0) \in (BJ)$ إذن

$2 \times 0 - 0 + C = 0$

$C = 0$

أي أن $\boxed{(BJ)\ :\ 2x - y = 0}$

ليكن K منتصف القطعة $[BC]$

$K(-\frac{1}{2}\ ,\frac{3}{2})$

<u>المتوسط</u> (AK)

لدينا $\overrightarrow{AK}\,(-\frac{5}{2}\ ,\frac{5}{2})$

إذن $(BJ)\ :\ \frac{5}{2}x + \frac{5}{2}y + C = 0$

لدينا $A(2\,,-1) \in (AK)$ تكافئ :

$\frac{10}{2} - \frac{5}{2} + C = 0$

$C = -\frac{5}{2}$

أي أن $\boxed{(AK)\ :\ x + y - 1 = 0}$

2 - زوج احداثيتي النظمة G يحقق النظمة

$$\begin{cases} x + 7y - 5 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases}$$

لنحدد احداثيات النقطة G

لدينا $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases}$

إذن $\begin{cases} y = 2x \\ 3x - 1 = 0 \end{cases}$ أي أن

$\begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$ إذن $G(\frac{1}{3}\,,\frac{2}{3})$

لنتأكد من أن G تنتمي إلى (IC)

لدينا $(IC)\ :\ x + 7y - 5 = 0$

$G(\frac{1}{3}\ ,\frac{2}{3}) \in (IC)$ تكافئ :

$\frac{1}{3} + \frac{14}{3} - 5 = 0$

$\frac{15}{3} - 5 = 0$

$5 - 5 = 0$

$0 = 0$

إذن $G \in (IC)$

ومنه G هي نقطة تقاطع المتوسطات (IC) و

(JB) و (AK)