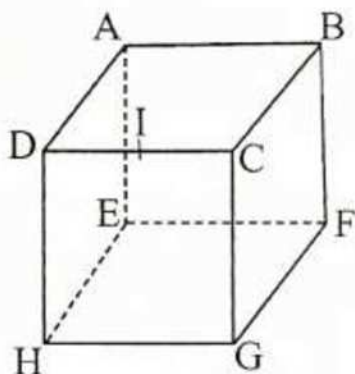


تمارين وحلولها

الجواب :



1 - لدينا ABCD مربع إذن $(AB) \parallel (DC)$

ومنه A و B و C و D مستوائية

إذن : $(DC) \subset (ABC)$

وبما أن $I \in [DC]$ فإن $I \in (ABC)$

2 - لدينا $(BC) \parallel (AD)$ لأن ABCD مربع

و $(EH) \parallel (AD)$ لأن ADHE مربع

إذن $(BC) \parallel (EH)$

ومنه النقط E و H و C و B مستوائية

تمارين 3 :

نعتبر متوازي المستطيلات القائم حيث قياسات

أضلاعه هي على التوالي : 1cm ، 2cm ، 3cm

(1) - ما هو قياس قطر متوازي المستطيلات ؟

(2) - ما هو ضلع مكعب حيث قطر هذا المكعب

يساوي قطر متوازي المستطيلات السابق.

تمرين 1 :

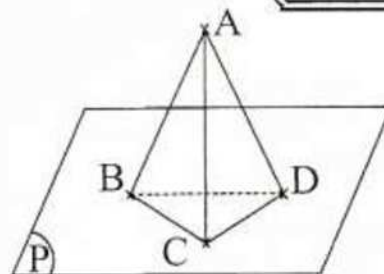
(P) مستوى في الفضاء (E) حيث B و C و D و

ثلاث نقط غير مستقيمة من (P) و $A \notin (P)$

أنشئ الشكل ثم حدد المستويات الموجودى

في الشكل.

الجواب :



وبما أن B و C و D من المستوى (P) و $A \notin (P)$

فإن النقط A و B و C و D غير مستوائية

إذن A و B و C و D تحدد رباعي الواجه.

لدينا أربع مستويات وهي :

(ABC) و (ABD) و (ACD) و (BCD)

تمرين 2 :

ABCDEF GH مكعبا و I منتصف القطعة [DC]

1 - هل النقطة I تنتمي إلى المستوى (ABC)؟

علل جوابك

2 - بين أن النقط E و H و C و B مستوائية

تمرين 4 :

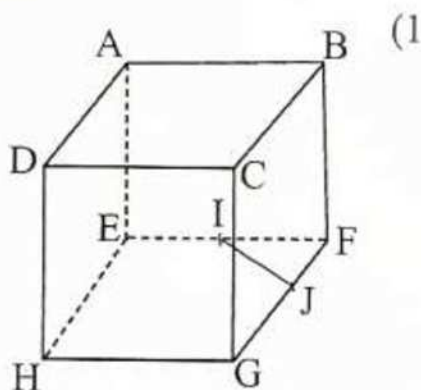
نعتبر ABCDEFGH مكعبا و I منتصف القطعة

[EF] و J منتصف القطعة [FG]

(1) - هل النقط I و J و F و D مستوائية ؟ (علل جوابك).

(2) - بين أن النقط A و C و G و E مستوائية

الجواب :



(1) لدينا $I \in (EF)$ و $J \in (FG)$
إذن النقطان I و J تنتميان إلى المستوى (EFGH)

ولدينا $D \notin (EFGH)$
إذن النقط I و J و F و D غير مستوائية

(2) لدينا $(AE) \parallel (BF)$

و $(BF) \parallel (CG)$

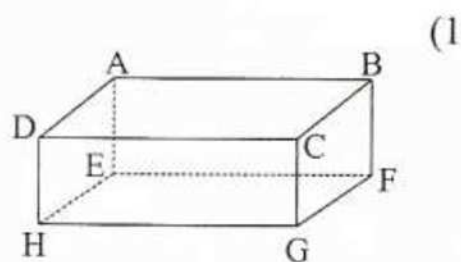
إذن $(AE) \parallel (CG)$ ①

ولدينا $AE = BF$

و $CG = BF$

إذن $AE = CG$ ②

الجواب :



لدينا AG قطر متوازي المستطيلات
لدينا حسب مبرهنة فيثاغورس :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2$$

$$= 3^2 + 1^2$$

$$= 10$$

$$AC^2 = 10$$

لدينا كذلك حسب مبرهنة فيثاغورس :

$$AG^2 = AC^2 + CG^2$$

$$= 10 + 2^2$$

$$= 14$$

$$\boxed{AG = \sqrt{14}} \quad \text{إذن :}$$

(2) ليكن a ضلع المكعب

إذن قطر المكعب هو : $a\sqrt{3}$

لدينا : $a\sqrt{3} = \sqrt{14}$

$$a = \frac{\sqrt{14}}{\sqrt{3}} \quad \text{إذن}$$

$$a = \frac{\sqrt{42}}{3}$$

إذن ضلع المكعب هو : $\frac{\sqrt{42}}{3}$ cm

$$L \in (BCD) \text{ اذن } \begin{cases} L \in (BC) \\ (BC) \subset (BCD) \end{cases}$$

إذن (ILK) و (BCD) يتقاطعان وفق المستقيم
(Δ) يمر من L
كذلك لدينا

$$M \in (IJK) \text{ اذن } \begin{cases} M \in (JK) \\ (JK) \subset (IJK) \end{cases}$$

$$M \in (BCD) \text{ اذن } \begin{cases} M \in (CD) \\ (CD) \subset (BCD) \end{cases}$$

ومنه $M \in (IJK) \cap (BCD) = (\Delta)$
كذلك لدينا

$$N \in (IJK) \text{ اذن } \begin{cases} N \in (IK) \\ (IK) \subset (IJK) \end{cases}$$

$$N \in (BCD) \text{ اذن } \begin{cases} N \in (BD) \\ (BD) \subset (BCD) \end{cases}$$

ومنه $N \in (IJK) \cap (BCD) = (\Delta)$
ومنه L و M و N تنتمي إلى نفس المستقيم (Δ)
وبالتالي L ، M ، N نقط مستقيمة

تمرين 6 :

ليكن SABCD هو ما قاعدته ABCD شبه
منحرف حيث (CD) يوازي (AB)

من ① و ② نستنتج أن ACGE متوازي
الاضلاع

ومنه $(AC) \parallel (EG)$

إذن النقط A و C و G و E مستوائية.

تمرين 5 :

ليكن ABCD رباعي أوجه

I و J و K نقط من [AB] و [AC] و [AD]

على التوالي بحيث

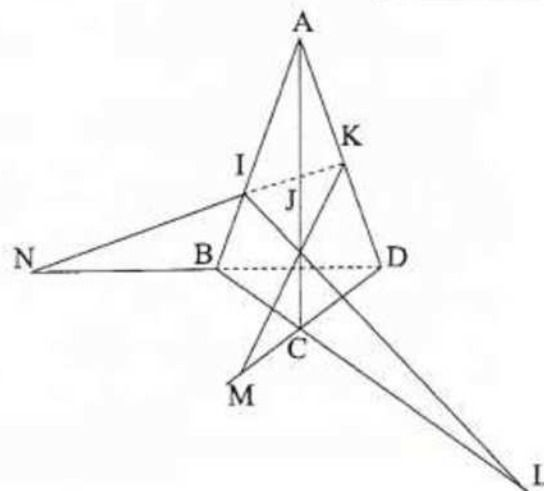
(IJ) يقطع (BC) في L

(JK) يقطع (CD) في M

(IK) يقطع (BD) في N

1 - بين أن النقط L و M و N مستقيمة

الجواب :



نعتبر المستويين (IJK) و (BCD)

لدينا $(IJK) \neq (BCD)$

$$L \in (IJK) \text{ اذن } \begin{cases} L \in (IJ) \\ (IJ) \subset (IJK) \end{cases} \text{ و}$$

إذن من ① و ② و ③ نستنتج أن

$$(SAC) \cap (SBD) = (SI)$$

② لدينا $A \in (SAB)$ و $A \notin (SCD)$

إذن $(SAB) \neq (SAD)$

لدينا $S \in (SAB) \cap (SCD)$

لدينا $(SCD) \cap (SAB) = (\Delta')$

و $(AB) \parallel (AC)$

و $(AB) \subset (SAB)$ و $(CD) \subset (SCD)$

إذن : (Δ') هو المستقيم المار من S والموازي لـ

(AB) و (CD)

③ لدينا $A \in (SAD)$ و $A \notin (SBC)$

إذن $(SBC) \neq (SAD)$ ①

لدينا كذلك $S \in (SBC) \cap (SAD)$ ②

لتكن J نقطة تقاطع المستقيمين (AD) و (BC)

إذن $J \in (AD)$ و $J \in (BC)$

ومنه $J \in (SAD)$ و $J \in (SBC)$

إذن $J \in (SBC) \cap (SAD)$ ③

من ① و ② و ③ نستنتج أن

$$(SBC) \cap (SAD) = (SJ)$$

تمرين 7 :

ABCDEFGH مكعبا في الفضاء

1 - حدد وانشئ المستقيم (Δ) تقاطع المستويين

(ACH) و (BDF) .

1 - حدد (Δ) تقاطع المستويين (SAC)

و (SBD)

2 - حدد (Δ') تقاطع المستويين (SAB)

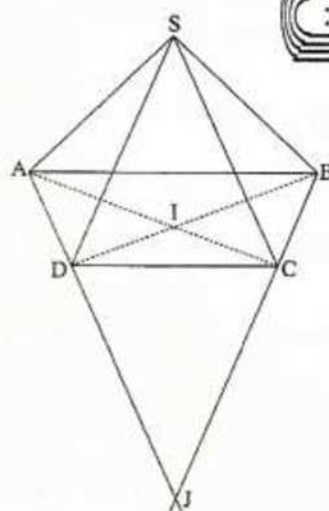
و (SCD)

3 - حدد (Δ'') تقاطع المستويين (SAB)

و (SCD)

الجواب :

①



لدينا $B \in (SBD)$ و $B \notin (SAC)$

إذن $(SAC) \neq (SBD)$ ①

لدينا $S \in (SBD)$ و $S \in (SAC)$

إذن $S \in (SAC) \cap (SBD)$ ②

لتكن I نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BD)

لدينا : $I \in (AC)$ و $I \in (AC)$

فإن $I \in (SAC)$

لدينا $I \in (BD)$ و $(BD) \subset (SBD)$

إذن $I \in (SBD)$

ومنه $I \in (SAC) \cap (SBD)$ ③

$$(BDF) \cap (ACH) = (HL)$$

② لدينا $I \in (ADH)$ و $I \in (IJE)$

اذن $(IJE) \neq (ADH)$

لدينا $E \in (ADH)$ و $E \in (IJE)$

لأن : $(DH) \parallel (AE)$

اذن : $E \in (ADH) \cap (IJE)$

لدينا $\begin{cases} AB=HG \\ (AB) \parallel (HG) \end{cases}$ اذن

ABGH متوازي الأضلاع

ومنه $(AH) \parallel (BG)$

نعتبر المثلث EBG

لدينا I منتصف [EG]

J منتصف [AB]

اذن $(IJ) \parallel (BG)$

وبالتالي $(IJ) \parallel (AH)$

لدينا $\begin{cases} (IJ) \parallel (AH) \\ (IJ) \subset (IJE) \\ (AH) \subset (ADH) \\ (ADH) \cap (IJE) = (\Delta') \end{cases}$

اذن (Δ') هو المستقيم المار من E والموازي لـ

(IJ) و (AH).

تمرين 8 :

ABCD رباعي الاوجه . E و F منتصفا

القطعتين [AB] و [DC] على التوالي و G مركز

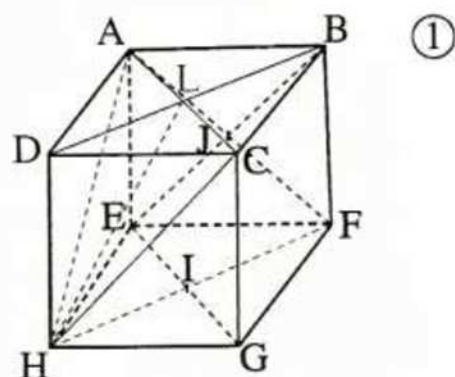
2 - ليكن I و J مركزا المربعين EFGH

و ABFE على التوالي

حدد المستقيم (Δ') تقاطع المستويين (IJE)

و (ADH).

الجواب :



لدينا $A \in (BDF)$ و $A \in (ACH)$

اذن $(ACH) \neq (BDF)$ ①

لدينا $H \in (ACH)$

بما أن $\begin{cases} DH=BF \\ (DH) \parallel (BF) \end{cases}$ فإن

الرباعي BDHF متوازي الاضلاع

ومنه B و D و H و F مستوائية

اذن $H \in (BDF)$

ومنه $H \in (BDF) \cap (ACH)$ ②

لتكن L نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BD)

اذن $L \in (BDF)$ و $L \in (ACH)$

ومنه $L \in (BDF) \cap (ACH)$ ③

اذن من ① و ② و ③ نستنتج أن

بما أن $(EG) \parallel (BF)$ فإن
حسب خاصية طاليس المباشرة :

$$\frac{EA}{BA} = \frac{AG}{AF}$$

أي أن $\frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ وهذا تناقض

إذن الافتراض خاطئ

ومنه (EG) و (BF) متقاطعان لأنهما

مستوائيان .

ج- لدينا $(BF) \subset (BCD)$

و $H \in (BF)$

إذن $H \in (BCD)$

ولدينا $H \in (EG)$

إذن $H \in (EG) \cap (BCD)$

ولدينا $E \in (EG)$ و $E \notin (BCD)$

إذن تقاطع المستقيم (EG) والمستوى (BCD)

هو النقطة H .

إذن : $(EG) \cap (BCD) = \{H\}$

2 - تحديد تقاطع المستويين (ABC) و (DEG)

لدينا $A \in (ABC)$ و $A \notin (DEG)$

إذن $(DEG) \neq (ABC)$ ①

لدينا $E \in (DEG)$ و $E \in (AB)$

إذن $E \in (ABC)$

إذن $E \in (ABC) \cap (DEG)$ ②

لتكن L منتصف القطعة $[AC]$

ثقل المثلث ADC .

1 - أ - بين ان : (EG) و (BF) مستوائيان

ب- بين ان : (EG) و (BF) متقاطعان

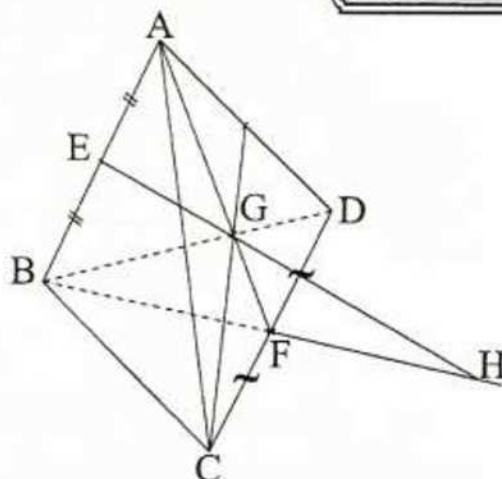
في نقطة H .

ج- استنتج تقاطع (EG) والمستوى

(BCD) .

2 - حدد تقاطع المستويين (ABC) و (DEG)

الجواب :



1 - أ - نعتبر المستوى (ABF)

لدينا $E \in (AB)$ إذن $E \in (ABF)$

لدينا $G \in (AF)$ إذن $G \in (ABF)$

ومنه $(EG) \subset (ABF)$

ولدينا $(BF) \subset (ABF)$

إذن (EG) و (BF) مستوائيان

ب - نفترض أن : $(EG) \parallel (BF)$

لدينا $\frac{EA}{BA} = \frac{1}{2}$

ولدينا $\frac{AG}{AF} = \frac{2}{3}$

1 - نعتبر المثلث SAB

لدينا I منتصف [AS]

J منتصف [BS]

إذن $(IJ) \parallel (AB)$

لدينا ABCD مستطيل إذن

$(AB) \parallel (DC)$

ومنه $(IJ) \parallel (DC)$

وبما أن $(DC) \subset (SDC)$

فإن $(IJ) \parallel (SDC)$

2 - نعتبر المثلث SAD

لدينا I منتصف [AS]

K منتصف [DS]

إذن $(IK) \parallel (AD)$

لدينا ABCD مستطيل ومنه

$(AD) \parallel (BC)$

وبالتالي $(BC) \parallel (IK)$

وبما أن $(BC) \subset (SBC)$

فإن $(IK) \parallel (SBC)$

لدينا (AB) و (AD) متقاطعان وضمن

المستوى (ABC)

ولدينا $(AB) \parallel (IJ)$ و $(AD) \parallel (IK)$

و (IJ) و (IK) متقاطعان وضمن المستوى

(IJK).

إذن $(IJK) \parallel (ABC)$

إذن $L \in (ABC)$

لأن $L \in (AC)$

لدينا (DL) متوسط في المثلث ACD

إذن G مركز ثقل المثلث ADC تنتمي إلى (DL).

ومنه $L \in (DL)$

وبالتالي $L \in (EDG)$

إذن $L \in (ABC) \cap (EDG)$ ③

إذن من ① و ② و ③ نستنتج أن

$(ABC) \cap (EDG) = (EL)$

تمارين 9 :

نعتبر SABCD هرم ما قاعدته المستطيل ABCD

I و J و K منتصفات القطع [SA] و [SB] و [SD]

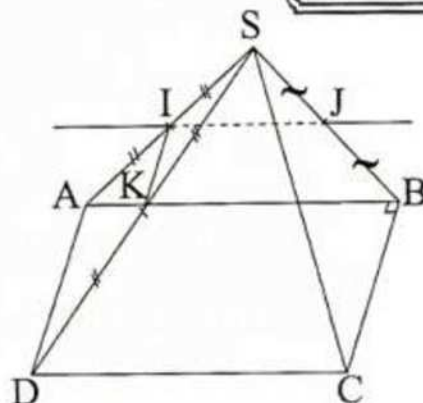
على التوالي .

1 - بين ان : (IJ) يوازي (SDC)

2 - بين ان : (IK) يوازي (SBC)

3 - بين ان : $(ABC) \parallel (IJK)$

الجواب :



تمرين 10 :

ليكن ABCDEFGH متوازي المستطيلات

1 - بين ان B و C و H و E نقط مستوائية.

2 - بين ان : $(BE) // (HC)$

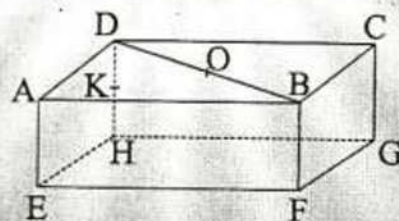
3 - لتكن O منتصف [BD] و K منتصف [DH]

بين ان : $(OK) // (BCH)$

4 - علما أن $AB = 4$ و $AD = 3$ و $AE = 2$

احسب حجم متوازي المستطيلات

ABCDEFGH.



الجواب :

1 - لدينا $(BC) // (FG)$ لأن BCGF متوازي أضلاع.

كذلك $(EH) // (FG)$ لأن EFGH متوازي أضلاع.

ومنه $(EH) // (BC)$

وبالتالي (EH) و (HC) مستقيمان مستويان إذن B و C و H و E نقط مستوائية.

2 - لدينا $(EH) // (BC)$ و $EH = BC$

إذن BCHE متوازي أضلاع.

ومنه $(HC) // (BE)$

3 - في المثلث DBH لدينا :

O منتصف [BD]

K منتصف [DH]

إذن $(OK) // (BH)$

ولدينا $(BH) \subset (BCH)$

وبالتالي $(OK) // (BCH)$

4 - حجم متوازي المستطيلات هو :

$$V = AB \cdot AD \cdot AE$$

$$= 2 \times 3 \times 4 = 24$$

تمرين 11 :

ليكن في الفضاء ABCD و ABEF متوازي

أضلاع لا يوجدان ضمن نفس المستوى.

1 - بين ان $(ADF) // (BCE)$

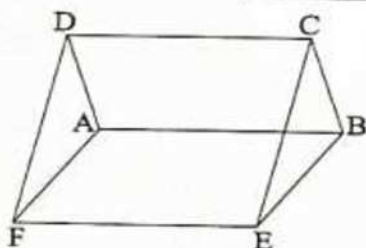
2 - أ - بين ان النقط E و F و C و D مستوائية

ب - بين أن (EC) يوازي (DF)

ج - استنتج طبيعة الرباعي CDEF

3 - حدد تقاطع المستويين (ACE) و (ADF)

الجواب :



1 - ABCD متوازي الاضلاع

إذن $(AD) // (BC)$

و $C \notin (ADF)$
 إذن $(ACE) \neq (ADF)$
 لدينا $A \in (ACE) \cap (ADF)$
 لنضع : $(ACE) \cap (ADF) = (\Delta)$
 ولدينا : $(FD) \subset (ADF)$
 $(CE) \subset (ACE)$
 و $(FD) \parallel (CE)$

إذن (Δ) هو المستقيم المار من A والموازي لـ
 (CE) و (FD)
 إذن تقاطع المستويين (ACE) و (ADF)
 هو المستقيم المار من A والموازي لـ (CE)
 و (FD) .

تمرين 12 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا والنقط M و I
 و N منتصفات القطع $[AE]$ و $[BF]$ و $[DH]$
 1- بين أن المستقيم (BA) يقطع المستقيم
 (EF) في نقطة K وان المستقيم (CN) يقطع
 المستقيم (GH) في نقطة L.
 2- بين ان : (BC) يوازي (KL)
 3- حدد تقاطع المستويين (ADE) و (IMH)
 4- بين أن المستقيم (IH) يوازي المستوى
 (KLC)

لدينا ABEF متوازي الاضلاع
 إذن $(AF) \parallel (BE)$
 لدينا (AD) و (AF) متقاطعان وضمن
 المستوى (ADF) .
 لدينا كذلك (BC) و (BE) متقاطعان وضمن
 المستوى (BCE)
 إذن $(ADF) \parallel (BCE)$
 2 - أ -

لدينا ABCD متوازي الاضلاع
 إذن $(DC) \parallel (AB)$
 لدينا ABEF متوازي الاضلاع
 إذن $(EF) \parallel (AB)$
 ومنه $(EF) \parallel (DC)$
 إذن النقط E و F و C و D مستوائية
 ب -

لدينا $(ADF) \parallel (BCE)$
 و $(EFDC) \cap (ADF) = (DF)$
 $(EFDC) \cap (BCE) = (EC)$
 ومنه : $(EC) \parallel (DF)$

حسب الخاصية " إذا توازي مستويان فإن كل
 مستوى ثالث يقطع أحدهما فهو يقطع الآخر
 وفق مستقيمين متوازيين "

ج- لدينا $(DC) \parallel (EF)$
 $(EC) \parallel (DF)$
 إذن الرباعي CDEF متوازي الاضلاع
 3 - لدينا $C \in (ACE)$

لدينا $(AE) \parallel (DH)$ إذن $H \in (ADE)$

و $H \in (IMH)$

إذن $H \in (ADE) \cap (IMH)$ ③

إذن من ① و ② و ③ نستنتج أن

$$(ADE) \cap (IMH) = (MH)$$

4 - لدينا $(BI) \parallel (NH)$ و $BI = NH$

إذن الرباعي BNHI متوازي الأضلاع

ومنه $(IH) \parallel (NB)$

وبما أن $(NB) \subset (KLC)$

فإن $(IH) \parallel (KLC)$

تمرين 13:

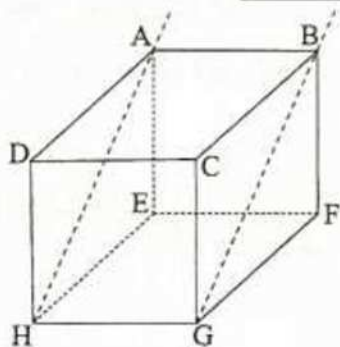
ليكن ABCDEFGH مكعبا

1 - بين أن $(HG) \perp (BF)$

2 - أ - بين أن $(AH) \parallel (GB)$

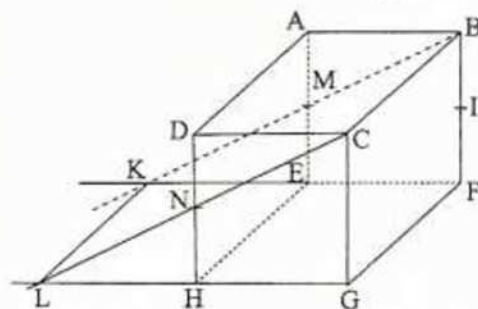
ب - استنتج أن $(DE) \perp (GB)$

الجواب:



1 - لدينا : مربع EFGH

الجواب:



1 - نعتبر المستوى ABEF

لدينا (AB) و (EF) و (MB) مستوائية

لدينا $(AB) \parallel (EF)$

و (BM) يقطع (AB) في B

إذن (BM) يقطع (EF) في نقطة K .

نعتبر المستوى DCGH:

لدينا (DC) و (HG) و (CN) مستوائية

لدينا $(DC) \parallel (HG)$ إذن (CN) يقطع (DC) في C

(CN) يقطع (HG) في نقطة L

2 - النقط B و C و N و L و K و M مستوائية

لدينا $(ABCD) \parallel (EFGH)$

و $(ABCD) \cap (BCLK) = (BC)$

$(EFGH) \cap (BCLK) = (KL)$

إذن $(BC) \parallel (KL)$

3 - لدينا $A \in (ADE)$ و $A \in (IMH)$

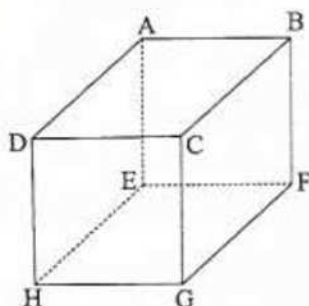
إذن ① $(IMH) \neq (ADE)$

لدينا M منتصف [AE] إذن $M \in (ADE)$

ولدينا $M \in (AMH)$

إذن ② $M \in (ADE) \cap (IMH)$

الجواب :



(1) - لدينا : $(HE) \perp (AE)$

لأن مربع ADHE

$(HE) \perp (EF)$

لأن مربع HEFG

لدينا كذلك : (AE) و (EF) متقاطعان في E

ضمن المستوى (ABF)

ومنه $(ABF) \perp (HE)$

(2) - أ - لدينا $(ABF) \perp (HE)$

و $(HE) \parallel (AD)$

إذن $(AD) \perp (ABF)$

وبما أن $(EF) \subset (ABF)$

فإن $(AD) \perp (EB)$

ب - لدينا $(AFG) = (AFGD)$

لأن $(FG) \parallel (AD)$

لدينا : $(EB) \perp (AD)$ ①

لدينا : $(EB) \perp (AF)$ ②

لأن $[AF]$ و $[EB]$ قطرا المربع ABFE

لدينا (AD) و (AF) متقاطعان في A وضمن

المستوى (AFG) ③

إذن $(HG) \parallel (EF)$

لدينا : مربع ABEF

إذن $(BF) \parallel (AE)$

و $(AE) \perp (EF)$ في النقطة E

إذن (HG) عمودي على (BF)

2 - أ -

لدينا $(HG) \parallel (EF)$ و $(EF) \parallel (AB)$

ومنه $(HG) \parallel (AB)$

لدينا كذلك : $HG = EF$

و $EF = AB$

إذن $HG = AB$

إذن $(HG) \parallel (AB)$ ومنه الرباعي

$HG = AB$

ABGH متوازي الاضلاع

ومنه $(AH) \parallel (GB)$

ب -

لدينا $(DE) \perp (AH)$ لأنهما قطر المربع ADHE

ولدينا $(AH) \parallel (GB)$

إذن $(DE) \perp (GB)$

تمرين 14 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا في الفضاء

(1) - بين أن $(ABF) \perp (HE)$

(2) - أ - بين أن $(EB) \perp (AD)$

ب - استنتج أن : $(AFG) \perp (EB)$

وبالتالي : $(IJ) \parallel (ABF)$

2 - لدينا $(AD) \perp (DC)$

$(AD) \perp (DH)$

و (DC) و (DH) متقاطعان ضمن المستوى
(HDC)

ومنه $(AD) \perp (HDC)$

ولدينا : $(IJ) \subset (HDC)$

إذن $(AD) \perp (IJ)$

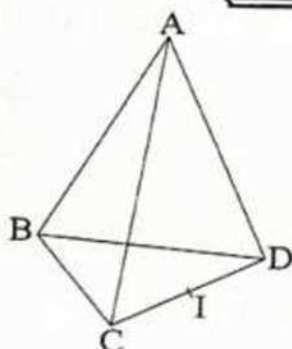
تمرين 16 :

ليكن ABCD رباعي أوجه بحيث :
 $AC = AD$ و $BC = BD$ ، I منتصف
[CD]

1 - بين أن : $(CD) \perp (ABI)$

2 - استنتج أن : $(AB) \perp (CD)$

الجواب :



1 - المثلث ACD متساوي الساقين لأن

$AC = AD$ رأسه A و I منتصف [CD]

إذن : ① $(AI) \perp (CD)$

من ① و ② و ③ نستنتج أن

$(AFG) \perp (EB)$

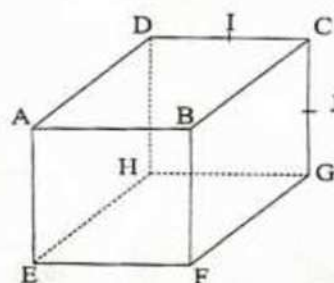
تمرين 15 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا.

I منتصف [CD] و J منتصف [CG]

1 - بين أن : $(IJ) \parallel (ABF)$

2 - أثبت أن : $(AD) \perp (IJ)$



الجواب :

1 - في المثلث DCG لدينا I منتصف [DC]

و لدينا J منتصف [CG]

إذن ① $(DG) \parallel (IJ)$

ولدينا $(BC) \parallel (AD)$

إذن $(AD) \parallel (FG)$

$(BC) \parallel (FG)$

ولدينا $AD = FG$

إذن الرباعي ADGF متوازي أضلاع

ومنه ② $(DG) \parallel (AF)$

من ① و ② نستنتج أن $(IJ) \parallel (AF)$

ولدينا $(AF) \subset (ABF)$

(1) - لدينا : $(AE) \perp (AB)$

لأن مربع ABFE

$(AE) \perp (AD)$

لأن مربع ADHE

و (AB) و (AD) متقاطعان و ضمن المستوى

(ABD) إذن $(AE) \perp (ABD)$

وبما أن $(BD) \subset (ABD)$

فإن : $(AE) \perp (BD)$

(2) - لدينا : $(AE) \perp (BD)$

لأن مربع ABCD

إذن $(AC) \perp (BD)$

(AE) و (AC) متقاطعان و ضمن المستوى

(ACE)

إذن $(BD) \perp (AEC)$

(3) - ليكن H مركز المربع ABCD

إذن SH هو ارتفاع الهرم SABCD

إذن حجم الهرم SABCD هو :

$$V = \frac{1}{3} \mathcal{A}_{ABCD} \times SH$$

لدينا : $SH = AE$

ومنه $SH = 3 \text{ cm}$

لدينا $\mathcal{A}_{ABCD} = AB^2 = 9 \text{ cm}^2$

ومنه $V = \frac{1}{3} \times 9 \times 3 \text{ cm}^3$

$$V = 9 \text{ cm}^3$$

كذلك BCD متساوي الساقين لأن

$BC = BD$ رأسه B و I منتصف [CD]

إذن : $(BI) \perp (CD)$ ②

ولدينا (BI) و (AI) متقاطعان ضمن المستوى

(ABI)

ومنه $(CD) \perp (ABI)$

(2) - لدينا : $(CD) \perp (ABI)$

و $(AB) \subset (ABI)$

إذن $(CD) \perp (AB)$

تمرين 17 :

ليكن ABCDEFGH مكعبا في الفضاء

(1) - بين أن $(AE) \perp (BD)$

(2) - بين أن $(BD) \perp (AEC)$

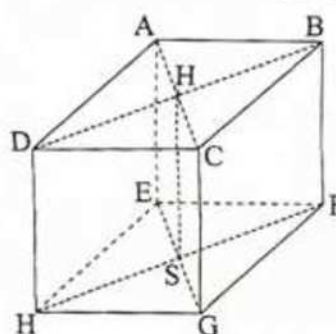
(3) - ليكن S مركز المربع EFGH

و $AB = 3 \text{ cm}$

احسب حجم الهرم SABCD

(4) - بين أن $(BDF) \perp (AEG)$

الجواب :



و (CH) ⊂ (BCD)

إذن ① (CH) ⊥ (AB)

لدينا H مركز تعامد المثلث BCD

إذن ② (CH) ⊥ (BD)

(AB) و (BD) متقاطعان و ضمن المستوى

③ (ABD)

من ① و ② و ③ نستنتج أن

(CH) ⊥ (ABD)

ب - لدينا (CH) ⊥ (ABD)

و (AD) ⊂ (ABD)

إذن (AD) ⊥ (CH)

المثلث BCD متساوي الاضلاع

إذن (IB) ارتفاع حيث I منتصف [CD]

إذن: $\mathcal{A}_{BCD} = \frac{CD \times BI}{2}$

حسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة في المثلث

BCI القائم الزاوية في I لدينا :

$$IC^2 = BC^2 - CI^2$$

$$= 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= 9 - \frac{9}{4}$$

$$= \frac{27}{4}$$

$$IC = \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad \text{إذن:}$$

$$\mathcal{A}_{BCD} = \frac{3 \times 3\sqrt{3}}{4} \quad \text{ومنه}$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{4} \text{ cm}^2$$

(4) - لدينا (AE) // (CG)

إذن النقط A و E و C و G مستوائية

ومنه (AEC) = (AEG)

لدينا (BD) ⊂ (BDF)

و (BD) ⊥ (AEG)

إذن (BDF) ⊥ (AEG)

تمرين 18:

ABCD رباعي الاوجه حيث :

(AB) ⊥ (BCD) و H مركز تعامد المثلث

BCD

1) أ - بين أن : (CH) ⊥ (ABD)

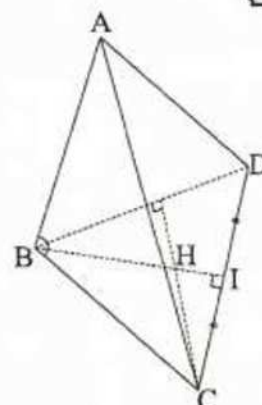
ب - استنتج أن : (AD) ⊥ (CH)

2) نفترض أن المثلث BCD متساوي

الاضلاع حيث CB = 3 cm و AB = 4cm

احسب حجم رباعي الاوجه ABCD.

الجواب:



1) أ - لدينا (AB) ⊥ (BCD)

ولدينا $AB = HG$ ومنه $ABGH$ متوازي اضلاع

وبالتالي $(BG) \parallel (AH)$ ②

إذن لدينا : $(AH) \parallel (BG)$

$(BG) \perp (FC)$

ومنه $(FC) \perp (AH)$

(2) - لدينا : $(FC) \perp (BG)$

لدينا $(AB) \perp (BC)$

$(AB) \perp (BF)$

و (BC) و (BF) متقاطعان ضمن (BCF)

إذن $(AB) \perp (BCF)$

ولدينا $(FC) \subset (BCF)$

إذن $(AB) \perp (FC)$

إذن $(FC) \perp (AB)$

$(FC) \perp (BG)$

و (AB) و (BG) متقاطعان ضمن (ABG)

وبالتالي $(FC) \perp (ABG)$ ③

(3) - لدينا : $(FC) \perp (ABG)$

و $(FC) \subset (EFC)$

ومنه $(EFC) \perp (ABG)$

تمرين 20 :

ليكن $ABCD$ رباعي الاوجه بحيث :

$(AB) \perp (BCD)$

(AA') و (CC') ارتفاعان للمثلث ACD

نعلم أن حجم رباعي الاوجه $ABCD$ هو :

$$V = \frac{1}{3} \times S_{ABC} \times AB$$

$[AB]$ ارتفاع لأن $(AB) \perp (BCD)$

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{9\sqrt{3}}{4} \times 4 \text{ cm}^3 \text{ إذن}$$

$$V = 3\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

تمرين 19 :

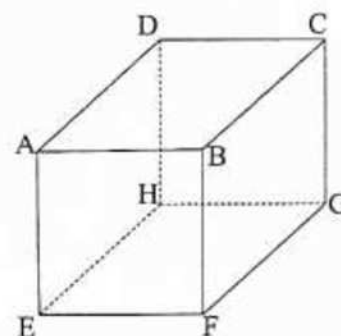
ليكن $ABCDEFGH$ مكعب

(1) - بين أن $(FC) \perp (AH)$

(2) - بين أن $(FC) \perp (ABG)$

(3) - استنتج أن : $(EFC) \perp (ABG)$

الجواب :



(1) - لدينا $BCGF$ مربع

إذن قطراه متعامدان

ومنه $(BG) \perp (FC)$ ①

ولدينا $(AB) \parallel (DC)$ إذن $(AB) \parallel (AH)$ $(DC) \parallel (HG)$

لدينا $(AB) \perp (BCD)$

و $(CC'') \subset (BCD)$ إذن $(AB) \perp (CC'')$

إذن $(CC'') \perp (BD)$

$(CC'') \perp (AB)$

و (BD) و (BA) متقاطعان ضمن (ABD)

وبالتالي $(CC'') \perp (ABD)$

بما ان $(AD) \subset (ABD)$

إذن $(CC'') \perp (AD)$

ولدينا $(CC') \perp (AD)$ لأن (CC') ارتفاع في المثلث ACD .

ولدينا (CC') و (CC'') متقاطعان ضمن $(CC'C')$

إذن $(AD) \perp (CC'C')$

تمرين 21:

ABC مثلث ضمن المستوى (P) و H مركز تعامده و O نقطة من المستقيم العمودي على

(P) في H حيث $H \neq O$

(1) أ - بين أن : $(AB) \perp (CHO)$

ب - استنتج أن : $(OC) \perp (AB)$

(2) بين أن : $(OA) \perp (BC)$

(3) المستقيم (Δ) المار من A والعمودي على

(OBC) يقطع هذا المستوى في النقطة K .

بين أن : $(OK) \perp (BC)$

و (CC'') ارتفاع في المثلث BCD .

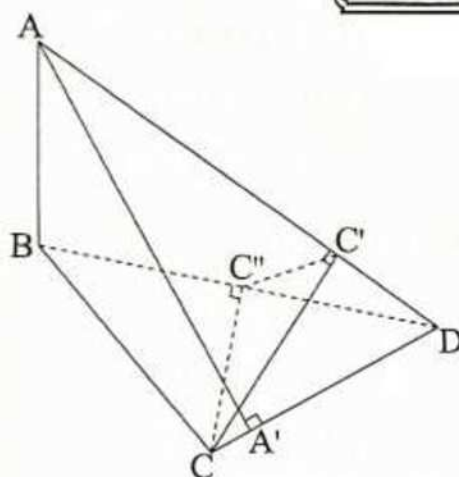
1 - انشى الشكل.

2 - بين أن (BA') ارتفاع في المثلث BCD

3 - بين أن : $(AD) \perp (CC'C')$

الجواب:

1 -



2 - لدينا $(AB) \perp (BCD)$ إذن $(AB) \perp (CD)$ و $(CD) \perp (BCD)$

①

(AA') ارتفاع في المثلث ACD

إذن : $(AA') \perp (CD)$ ②

ولدينا (AB) و (AA') متقاطعان ضمن $(AA'B)$.

إذن من ① و ② نستنتج أن

$(CD) \perp (AA'B)$

و لدينا $(A'B) \subset (AA'B)$

إذن $(CD) \perp (A'B)$

وبالتالي : (BA') ارتفاع في المثلث BCD .

3 - لدينا $(CC'') \perp (BD)$

ومنه $(AOH) \perp (BC)$

وبما أن $(OA) \subset (AOH)$

فإن $(OA) \perp (BC)$

(3) لدينا حسب (2) : $(OA) \perp (BC)$

لدينا $(AK) \perp (OBC)$

و $(BC) \subset (OBC)$

إذن $(AK) \perp (BC)$

لدينا (AK) و (OA) متقاطعان في A وضمن
المستوى (OAK) .

إذن $(BC) \perp (OAK)$

وبما أن $(OK) \subset (OAK)$

فإن $(BC) \perp (OK)$

تمرين 22:

نعتبر ABCD رباعي أوجه حيث :

$(AC) \perp (AD)$ و $(AB) \perp (AC)$

و $(AD) \perp (AB)$ و M نقطة من [DH]

بحيث $M \neq C$ و $M \neq B$.

المستقيم المار من M والموازي لـ (BD) يقطع

(DC) في N والمستقيم المار من M والموازي

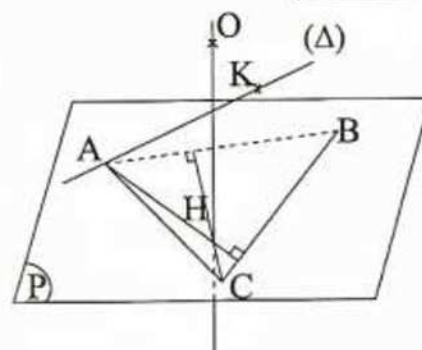
لـ (AC) يقطع (AB) في Q.

1 - ارسم الشكل

2 - بين ان : $(AC) \parallel (MNQ)$

و $(BD) \parallel (MNQ)$

الجواب:



1) أ - لدينا H مركز تعامد المثلث ABC

إذن $(CH) \perp (AB)$ ①

لدينا $(P) \perp (OH)$

و $(AB) \subset (P)$

إذن $(OH) \perp (AB)$ ②

لدينا (CH) و (OH) متقاطعان في H وضمن

المستوى (CHO) ③

من ① و ② و ③ نستنتج أن

$(AB) \perp (CHO)$

ب - لدينا $(AB) \perp (CHO)$

و $(OC) \subset (CHO)$

إذن $(AB) \perp (OC)$

2) لدينا $(BC) \subset (P)$

$(P) \perp (OH)$

إذن $(BC) \perp (OH)$

لدينا $(AH) \perp (BC)$ لأن H مركز تعامد

المثلث ABC

و (AH) و (OH) متقاطعان وضمن المستوى

(AOH)

ومنه M, N, P, Q نقط مستوائية

وبالتالي $P \in (MNQ)$

b - لدينا $(AC) \perp (AB)$

$(AC) \perp (AD)$

(AB) و (AD) متقاطعان ضمن المستوى

(ABD) .

ومنه $(AC) \perp (ABD)$

ولدينا $(NP) \parallel (AC)$

ومنه $(NP) \perp (ABD)$

ولدينا $(PQ) \subset (ABD)$

ومنه $(NP) \perp (PQ)$

لدينا $(MNQ) \cap (ABD) = (PQ)$

ولدينا $(MN) \subset (MNQ)$

$(BD) \subset (ABD)$

و $(BD) \parallel (MN)$ إذن حسب مبرهنة

السقف فإن $(MN) \parallel (PQ)$

إذن M, N, P, Q نقط مستوائية

و $(MN) \parallel (PQ)$ و $(MQ) \parallel (NP)$

و $(NP) \perp (PQ)$

إذن $MNPQ$ مستطيل

4 - حجم رباعي الأوجه هو :

$$V = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot \frac{AD \cdot AC}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{6}$$

$$V = 4 \quad \text{أي}$$

3 - الموازي لـ (AC) والمار من N يقطع

(AD) في P

a - بين أن : $P \in (MNQ)$

b - بين أن : $(NP) \perp (PQ)$ ثم أن الرباعي

$MNPQ$ مستطيل .

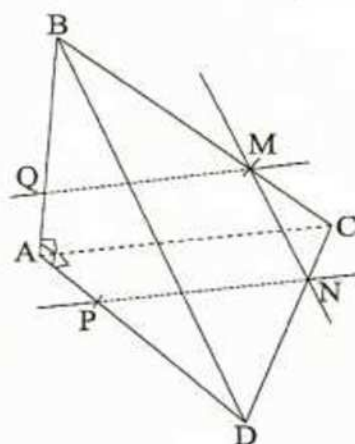
4 - علما أن : $AD = 4$ و $AC = 3$

و $AB = 2$ احسب حجم رباعي الأوجه

$ABCD$.

الجواب :

1 -



2 - لدينا $(AC) \parallel (QM)$

و $(QM) \subset (MNQ)$

إذن $(AC) \parallel (MNQ)$

لدينا $(BD) \parallel (MN)$

و $(MN) \subset (MNQ)$

إذن $(BD) \parallel (MNQ)$

3 - a - لدينا $(MQ) \parallel (AC)$

و $(NP) \parallel (AC)$

إذن $(MQ) \parallel (NP)$