تحويلات اعتيادية
تمارين وحلول

تمرين1

ليكن ABC مثلثا، و I منتصف $[BC]$، و D و E نقطتين حيث $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AI}$

و لتكن t الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$

1- أنشئ الشكل

2- بين أن D و E صورتي B و C بالإزاحة t على التوالي.

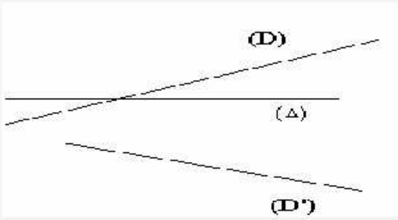
3- لتكن J تقاطع نقطة تقاطع المستقيمين (AI) و (DE). أثبت أن $t(I)=J$

4- نعتبر التحاكي h ذا المركز A و النسبة $\frac{1}{2}$ ، و النقطة D' صورة D بـ h.

أ- بين أن $h(J)=I$

ب- أثبت أن D' منتصف $[BI]$

تمرين2



نعتبر الشكل

أنشئ نقطة A من (D) و B من (D') حيث $S_{(\Delta)}(A)=B$

علل جوابك

تمرين3

ABC مثلث و $M\in(BC)$ حيث $M\neq C$ $M\neq B$

1- أنشئ المستقيم (Δ) الموازي لـ (BC) و المار من A

2- الموازي لـ (AB) المار من M يقطع (Δ) في D و الموازي لـ (AC) المار من M يقطع (Δ) في E

حدد صورة كل من (CA) و (CM) بالتماثل المركزي S_I حيث I منتصف $[AM]$

استنتج $S_I(C)$

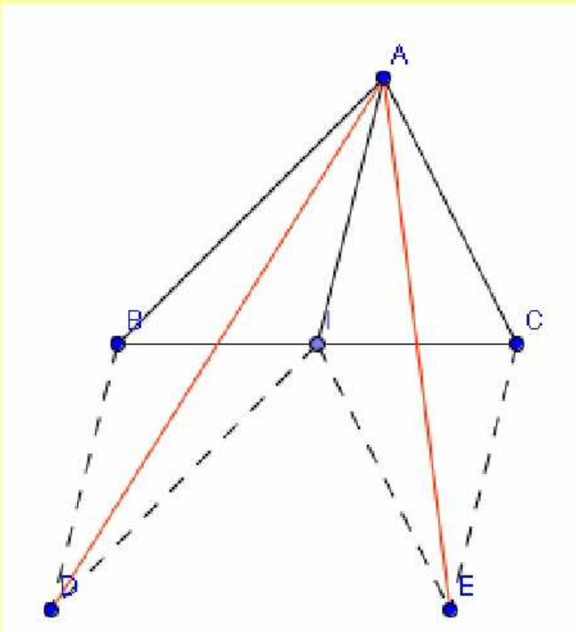
حلول

حل تمرين1

ABC مثلث و I منتصف $[BC]$، و D و E نقطتين حيث $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}$ و $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AI}$

t الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$

1- الشكل



2- نبين أن D و E صورتي B و C بالإزاحة t على التوالي.

t الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$

لدينا $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}$ و منه $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AI}$ و بالتالي $t(B)=D$

لدينا $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AI}$ و منه $\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{AI}$ و بالتالي $t(C)=E$

3- نثبت أن $t(I)=J$

J تقاطع نقطة تقاطع المستقيمين (AI) و (DE).

لدينا t الإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AI}$ ومنه $t[(AI)]=(AI)$

لدينا $t(B)=D$ و $t(C)=E$ و منه $t[(BC)]=(DE)$

و بالتالي $t[(BC)\cap(AI)]=(DE)\cap(AI)$ إذن $t(I)=J$

4- أ- نبين أن $h(J)=I$

h تحاك مركزه A و النسبة $\frac{1}{2}$ ،

لدينا $t(I)=J$ ومنه $\overrightarrow{IJ}=\overrightarrow{AI}$ و منه $\overrightarrow{AJ}-\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AI}$ و بالتالي $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AJ}$

إذن $h(J)=I$

ب- نثبت أن D' منتصف $[BI]$

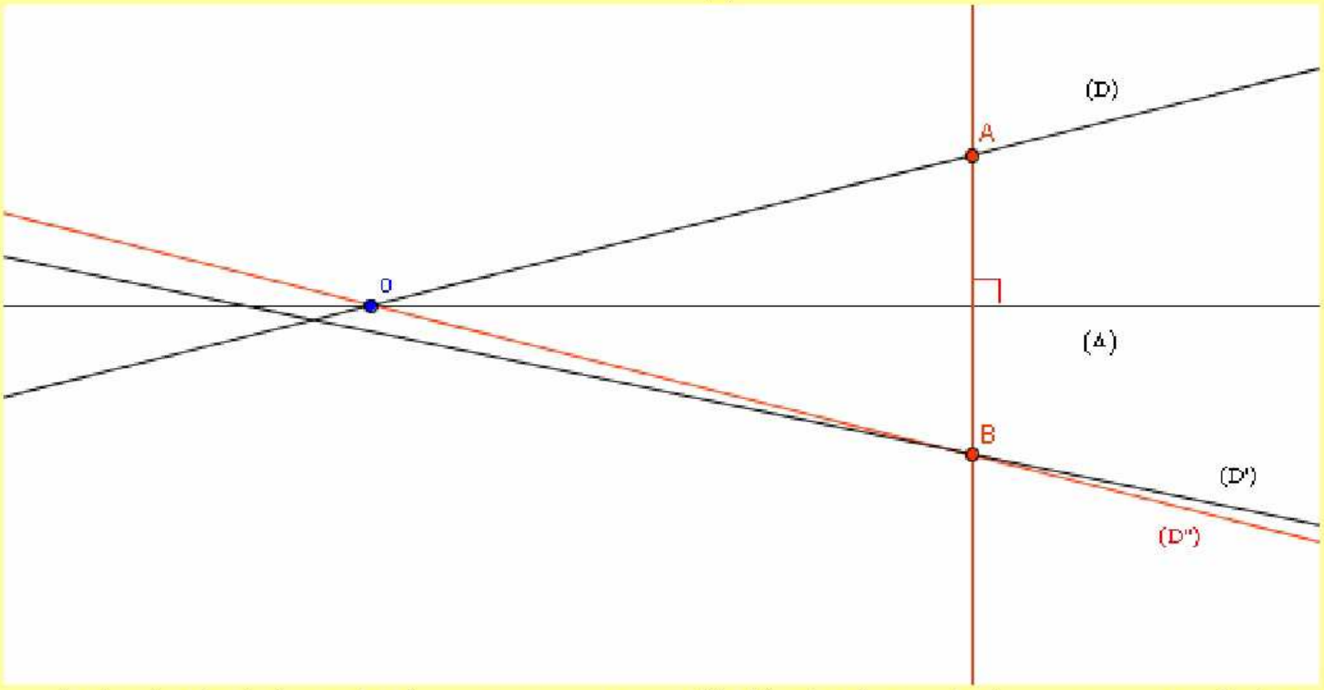
$h(D)=D'$ و منه $\overrightarrow{AD'}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ و حيث $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}$ فان $\overrightarrow{AD'}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}\right)$

إذن D' منتصف $[BI]$

حل تمرين2

نعتبر الشكل

انشاء A من (D) و B من (D') حيث $S_{(\Delta)}(A)=B$



$S_{(\Delta)}(A)=B$ و A من (D) ومنه $B\in S_{\Delta}((D))=(D")$ و حيث B من (D') فان $(D')\cap(D")=\{B\}$

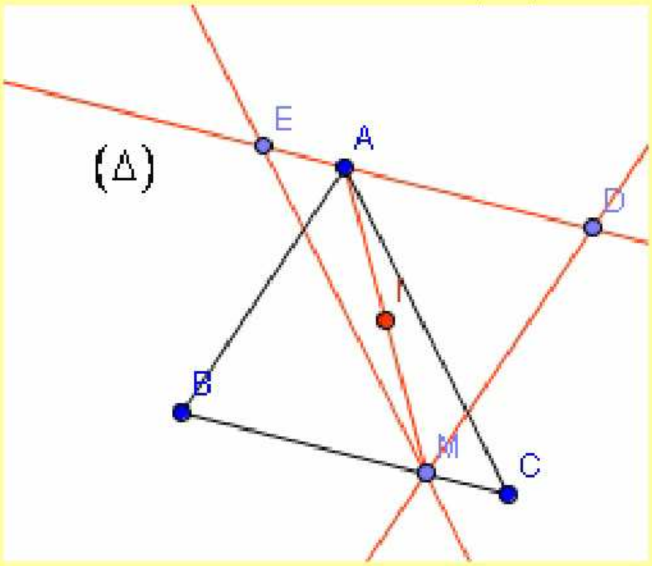
النقطة A هي تقاطع (D) و العمودي على (Δ) المار من B

لانشاء الشكل ننشئ $(D")$ ثم B تقاطع (D') و $(D")$ وبعذلك ننشئ A

حل تمرين3

ABC مثلث و $M \in (BC)$ حيث $M \neq C$ $M \neq B$

1- ننشئ المستقيم (Δ) الموازي لـ (BC) و المار من A



2- الموازي لـ (AB) المار من M يقطع (Δ) في D و الموازي لـ (AC) المار من M يقطع (Δ) في E

نحدد صورة كل من (CA) و (CM) بالتماثل المركزي S_I

لدينا I منتصف $[AM]$ ومنه $S_I(A) = M$ و بالتالي $S_I((AC))$ هو المستقيم المار من M و الموازي للمستقيم (CA) و حيث $(CA)//(EM)$ فان $S_I((AC)) = (EM)$

لدينا $S_I(M) = A$ ومنه $S_I((CM))$ هو المستقيم المار من A و الموازي للمستقيم (CM)

وحيث $(CM)//(\Delta)$ و $A \in (\Delta)$ فان $S_I((CM)) = (\Delta)$

نستنتج $S_I(C)$

$$S_I((AC) \cap (CM)) = S_I((AC)) \cap S_I((CM)) = (EM) \cap (\Delta)$$

و حيث أن $(EM) \cap (\Delta) = \{E\}$ و $(AC) \cap (CM) = \{C\}$ فان $S_I(C) = E$

تمارين

تمرين1

أنشئ A_1 و B_1 صورتي A و B بتحاك نسبته $\frac{2}{3}$

أنشئ A' و B' صورتي A_1 و B_1 بتحاك نسبته $\frac{-1}{4}$

أنشئ A'' و B'' صورتي A_1 و B_1 بتحاك نسبته $\frac{3}{2}$

حدد طبيعة التحويل الذي يحول A و B الى A' و B' على التوالي

حدد طبيعة التحويل الذي يحول A و B الى A'' و B'' على التوالي

تمرين2

ليكن $ABCD$ متوازي الأضلاع و I و J نقطتين معرفتين بـ $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$; $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$

1- أنشئ الشكل

2- بين أن (BJ) صورة (AI) بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$

3- نعتبر التحاكي h ذا المركز I و الذي يحاول B إلى C

a. بين أن $h((AB))=(CD)$

b. أثبت أن بسبة h هي العدد -2

4- لتكن K نقطة حيث $\overrightarrow{KI}=2\overrightarrow{AB}$

أ- بين أن $h(J)=K$

ب- أثبت أن $AI=\frac{1}{2}CK$

تمرين3

نعتبر (C) دائرة مركزها Ω و شعاعها 4 و A نقطة من (C)

1- أ) حدد ثم أنشئ (C') صورة (C) بالتحاكي h الذي مركزه Ω ونسبته $\frac{3}{2}$.

ب) استنتج انشاء النقطة Q صورة A بالتحاكي h

2- نعتبر نقطة B من (C) بحيث A و Ω و B غير مستقيمية

المستقيم المار من Q و الموازي للمستقيم (AB) يقطع (C') في R.

أثبت أن A و Ω و R مستقيمية

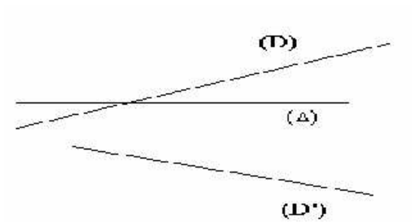
تمرين4

ليكن A و B نقطتين مختلفين. نعتبر T تحويل يربط M بـ M' حيث $\overrightarrow{MM'}=2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$

حدد طبيعة T و عناصرها المميزة.

تمرين5

نعتبر الشكل



أوجد نقطة A من (D) و B من (D') حيث $S_{(\Delta)}(A)=B$

تمرين6

ABC مثلث و $M\in(BC)$ حيث $M\neq C$ $M\neq B$

5- أنشئ المستقيم (Δ) الموازي لـ (BC) و المار من A

6- الموازي لـ (AB) المار من M يقطع (Δ) في D و الموازي لـ (AC) المار من M يقطع (Δ) في E

حدد صورة كل من (CA) و (CM) بالتماثل المركزي S_I حيث I منتصف $[AM]$ استنتج $S_I(C)$

تمرين7

ABC مثلث محاط بدائرة (C) مركزها O و أحد أقطارها $[AD]$. لتكن I منتصف $[BC]$ و B' و C' صورتي B و C بالتحاكي $h(A;2)$. النقطة H المسقط العمودي لـ D على المستقيم $(B'C')$

1- أنشئ الشكل

2- بين أن H منتصف $[B'C']$

3- بين أن $h(I)=H$ ثم استنتج أن A و I و H مستقيمية

تمرين8

لتكن (C) دائرة مركزها O وشعاعها R و M نقطة من (C) و A و B و N نقط حيث $AMBN$ متوازي الأضلاع. ما هو المحل الهندسي للنقطة N عندما تتغير النقطة M على (C)

(يمكن اعتبار التماثل المركزي S_I حيث I مركز $AMBN$)

تمرين9

في مستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O;\vec{i};\vec{j})$. نعتبر h تحاك مركزه $\Omega(-2;1)$ نسبته $\frac{-3}{2}$ و t ازاحة متجهته $\vec{u}(1;3)$ و $(D):-2x+y-3=0$ و $(\Delta):-x-y+1=0$

ليكن T تحويل معرف بالصيغة التحليلية $\begin{cases} x' = -3x + 2 \\ y' = -3y - 4 \end{cases}$

1- حدد صيغ تحويلية لتحويلات h و t و $S_{(\Delta)}$

2- حدد صورة المستقيم (D) بكل من ا لتحويلات h و t و $S_{(\Delta)}$

3- أ- بين أن T تحاك وحدد عناصره المميزة.

ب- حدد صورة الدائرة $C(\Omega;2)$ بالتحويل T

A' و B' و C' هي صور A , B , C على التوالي.

5 - التطبيقات السابقة تحافظ على الاستقامية ومعاملها وعلى المنتصف وعلى صور الأشكال ...

تمارين وحلولها

تمرين 1 :

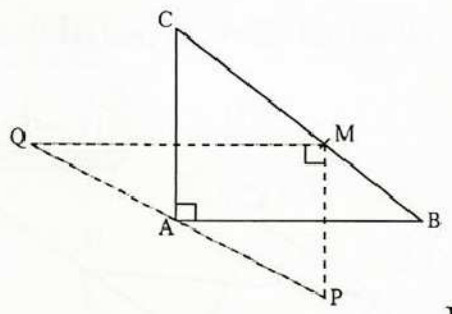
ABC مثلث قائم الزاوية في A.

M نقطة تنتمي إلى القطعة $[BC]$. النقطة P مماثلة النقطة M بالنسبة للمستقيم (AB) و Q مماثلة M بالنسبة للمستقيم (AC).

1) - بين أن النقط A و P و Q مستقيمية (باستعمال التماثل المحوري).

2) - باستعمال التماثل المحوري بين أن A منتصف $[PQ]$.

الجواب :



1) - لدينا : $S_{(AB)}(M) = P$

$S_{(AB)}(A) = A$

$S_{(AB)}(B) = B$

إذن صورة الزاوية $B\hat{A}M$ بـ $S_{(AB)}$ هي الزاوية $B\hat{A}P$.

ومنه $B\hat{A}M = B\hat{A}P$

لدينا كذلك : $S_{(AC)}(A) = A$ و $S_{(AC)}(C) = C$ و $S_{(AC)}(M) = Q$

إذن صورة الزاوية $C\hat{A}M$ ب $S_{(AC)}$ هي الزاوية $C\hat{A}Q$.

ومنه : $C\hat{A}M = C\hat{A}Q$

وبما أن $B\hat{A}M + C\hat{A}M = 90°$ فإن : $B\hat{A}P + C\hat{A}Q = 90°$

لدينا :
$$
\begin{aligned}
Q\hat{A}P &= Q\hat{A}C + C\hat{A}B + B\hat{A}P \\
&= Q\hat{A}C + B\hat{A}P + C\hat{A}B \\
&= 90° + 90° \\
&= 180°
\end{aligned}
$$

يعني $t_{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{BC}}$

يعني $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

يعني $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

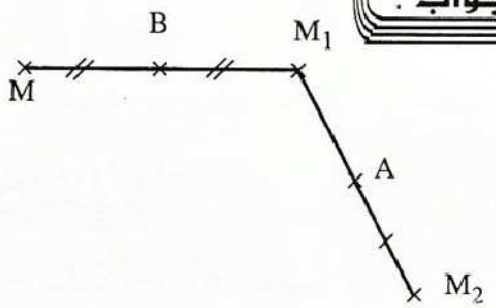
وهذا يعني أن ABCD متوازي الأضلاع.

تمرين 17:

نعتبر التماثلين المركزيين S_A و S_B.

أثبت $S_A \circ S_B$ هو الإزاحة ذات المتجهة $-2\overrightarrow{AB}$.

الجواب :



لتكن $M \in (P)$

ولتكن M_1 صورة M بـ S_B

أي $S_B(M) = M_1$

M_2 صورة M_1 بـ S_A

أي $S_A(M_1) = M_2$

ومنه $S_A \circ S_B(M) = M_2$

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM_2}$$
$$= \overrightarrow{BM_1} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{M_1A}$$
$$= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BA}$$
$$= 2\overrightarrow{BA}$$

ومنه $\overrightarrow{MM_2} = -2\overrightarrow{BA}$

وهذا يعني $t_{-2\overrightarrow{AB}}(M) = M_2$

وبالتالي : $S_A \circ S_B = t_{-2\overrightarrow{AB}}$

تمرين 18:

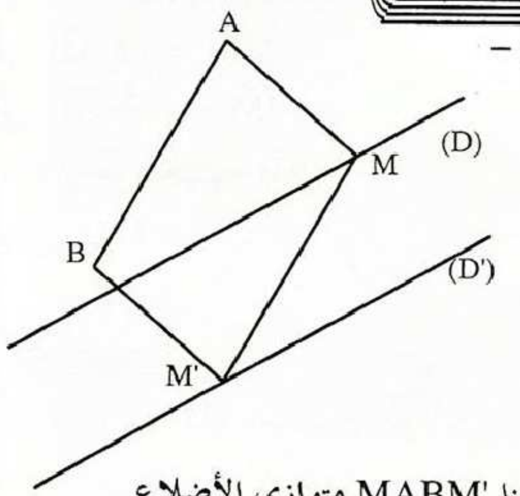
A و B نقطتان.

1) – (D) مستقيم معلوم و M نقطة تتغير عليه
ماهي مجموعة النقط M' بحيث يكون الرباعي MABM' متوازي الأضلاع ؟

2) – ($\mathscr{C}$) دائرة معلومة و M نقطة تتغير عليها.
ماهي مجموعة النقط M' حيث MABM' متوازي الأضلاع ؟

الجواب :

1) –



لدينا MABM' متوازي الأضلاع

إذن $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{BC}$ أي أن $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$

إذن M' صورة M بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$

وبما أن M تتغير على المستقيم (D) فإن M'
تتغير على المستقيم (D') صورة (D) بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$.

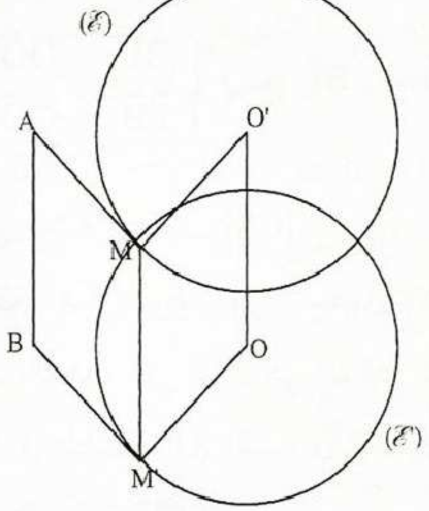
إذن مجموعة النقط M' هي المستقيم (D') المار من M' والموازي لـ (D)

2) – لدينا MABM' متوازي الأضلاع

إذن $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{AB}$

أي أن $M' = t_{\overrightarrow{AB}}(M)$

إذن M' صورة M بالإزاحة $t_{\vec{AB}}$ بما أن M تتغير على الدائرة $(\mathscr{C})$ فإن M' تتغير على الدائرة $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$ بالإزاحة $t_{\vec{AB}}$ إذن مجموعة النقط M' هي الدائرة $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$ بالإزاحة $t_{\vec{AB}}$.



تمرين 19:

نعتبر نقطتين مختلفتين A و B من المستوى (P).
لتكن F التطبيق الذي يربط كل نقطة M بالنقطة M' بحيث :

$$\vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} = \vec{0}$$

1 – باستعمال الخاصية المميزة بين أن f إزاحة.

2 – حدد متجهة الإزاحة f.

الجواب :

1) – لتكن M و N نقطتين من (P) و M' و N' صورتيهما بـــ f

$f(M) = M'$ يعني

$$(1) \quad \vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} = \vec{0}$$

$f(N) = N'$ يعني

$$(2) \quad \vec{N'A} - \vec{N'B} + 5\vec{NN'} = \vec{0}$$

من (1) – (2) نستنتج أن

$$\vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} - \vec{N'A} + \vec{N'B} - 5\vec{NM'} = \vec{0}$$

يعني $\vec{BA} + 5\vec{MM'} + \vec{BA} - 5\vec{NN'} = \vec{0}$

يعني $5\vec{MN} + 5\vec{NM'} - 5\vec{NM'} - 5\vec{M'N'} = \vec{0}$

يعني $5\vec{MN} = 5\vec{M'N'}$

يعني $\vec{M'N'} = \vec{MN}$

إذن f إزاحة

2) – $f(M) = M'$ يعني

$$\vec{M'A} - \vec{M'B} + 5\vec{MM'} = \vec{0}$$

يعني $\vec{BA} + 5\vec{MM'} = \vec{0}$

يعني $\vec{MM'} = \frac{1}{5}\vec{AB}$

يعني $t_{\frac{1}{5}\vec{AB}}(M) = M'$

ومنه $f = t_{\frac{1}{5}\vec{AB}}$ أي f إزاحة متجهتها $\vec{u} = \frac{1}{5}\vec{AB}$

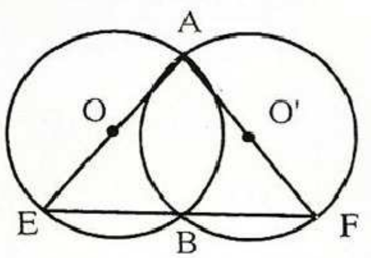
تمرين 20:

لتكن $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$ دائرتين متقايستين ومتقاطعتين في نقطتين A و B النقطتان E و F متقابلتان قطريا للنقطة A على كل من الدائرتين $(\mathscr{C})$ و $(\mathscr{C}')$.

1 – أثبت أن النقط B ، E و F مستقيمية.

2 – بين أن B منتصف [EF].

الجواب :



1) – لدينا [AE] قطر في الدائرة $(\mathscr{C})$ و $B \in (\mathscr{C})$

إذن $\frac{\pi}{2}$ $\widehat{EBA}$

كذلك [AF] قطر في الدائرة $(\mathscr{C}')$ و $B \in (\mathscr{C}')$

إذن $\frac{\pi}{2}$ $\widehat{ABF}$

ومنه

$$\widehat{EBF} = \widehat{EBA} + \widehat{ABF} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

وبالتالي E ، B ، F نقط مستقيمية.

2) – نعتبر المثلث AEF و O منتصف [AE]

و 'O منتصف [AF] إذن $2\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{EF}$

إذن $EF = 2OO'$ ومنه $EF > OO'$

نعتبر الإزاحة t التي متجهتها $\overrightarrow{OO'}$

لدينا $t(O) = O'$ لأن $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OO'}$ و $(\mathscr{C})$

و $(\mathscr{C}')$ لهما نفس الشعاع إذن :

$t((\mathscr{C})) = (\mathscr{C}')$

ولدينا $E \in (\mathscr{C}) \cap (EF)$ إذن

$t(E) \in t((\mathscr{C})) \cap t((EF))$

يعني $t(E) \in (\mathscr{C}') \cap (EF)$

ملاحظة : $t((EF)) = (EF)$ لأن متجهة

الإزاحة t . $\overrightarrow{OO'}$ موجهة لـ (EF)

إذن : $t(E) \in \{B , F\}$

لأن $\{B , F\}$ $(\mathscr{C}') \cap (EF)$

ومنه $t(E) = B$ أو $t(E) = F$

وبما أن $EF > OO'$ فإن $t(E) = B$

أي $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OO'}$

كذلك : $B \in (\mathscr{C}) \cap (EF)$

إذن $t(B) \in t((\mathscr{C})) \cap t((EF))$

يعني $t(B) \in (\mathscr{C}') \cap (EF)$

يعني $t(B) \in \{B , F\}$

وحيث أن الإزاحة t لا تقبل نقطة صامدة

لأن $\overrightarrow{OO'} \neq \vec{0}$ فإن $t(B) = F$

أي $\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OO'}$

إذن $\begin{cases} \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{OO'} \\ \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{OO'} \end{cases}$ ومنه $\overrightarrow{EB} = \overrightarrow{BF}$

وبالتالي فإن B منتصف [EF].

ملاحظة : يمكن البرهان دون استعمال الإزاحة وذلك بالبرهان على أن B هي المسقط العمودي لـ A في المثلث AEF المتساوي الساقين ومنه تكون B منتصف [EF].

تمرين 21:

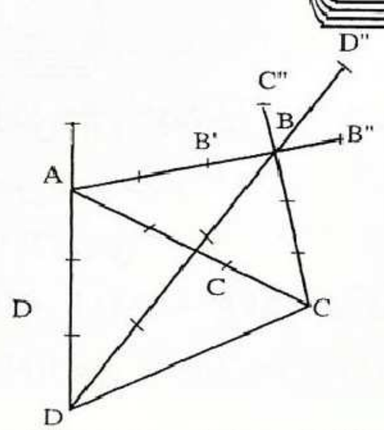
لتكن ABCD رباعيا.

أنشئ صور النقط A و B و C و D

– بالتحاكي الذي مركزه A ونسبته $\frac{2}{3}$.

– بالتحاكي الذي مركزه B ونسبته $-\frac{1}{3}$.

الجواب :



نعتبر التحاكي h بحيث : $h = h\left(A,\frac{2}{3}\right)$

$h(A) = A$ لأن A مركز التحاكي h.

$h(B) = B'$ يعني $\overrightarrow{AB'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

$h(C) = C'$ يعني $\overrightarrow{AC'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$h(D) = D'$ يعني $\overrightarrow{AD'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

نعتبر التحاكي h الذي مركزه B ونسبته $-\frac{1}{3}$.

$h(B') = B$ لأن B هو مركز التحاكي

$h(A) = A''$ يعني $\overrightarrow{BA''} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

$h(C) = C''$ يعني $\overrightarrow{BC''} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$

$h(D) = D''$ يعني $\overrightarrow{BD''} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

تمرين 22:

حدد في الحالات التالية نسبة التحاكي الذي مركزه A ويحول النقطة B إلى النقطة C في كل حالة :

1) – $3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

2) – $\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

3) – $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$

4) – $\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AB}$

الجواب :

ليكن h تحاكي مركزه A ونسبته k ويحول B إلى C.

1) - $3\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

يعني $\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

يعني $h(B) = C$ حيث $h = h\left(A,-\frac{2}{3}\right)$

وبالتالي $k = -\frac{2}{3}$

2) - $\overrightarrow{CA} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{BA}$

يعني $\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$

يعني $h(B) = C$ حيث $h = h\left(A,+\frac{2}{3}\right)$

وبالتالي $k = -\frac{2}{3}$

3) - $3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$ يعني $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

يعني $h(B) = C$ حيث $h = h\left(A,\frac{2}{3}\right)$

وبالتالي $k = \frac{3}{2}$

4) - لدينا $\overrightarrow{CA} = -3\overrightarrow{AB}$

يعني $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$

يعني $h(B) = C$ حيث $h = h(A,3)$

وبالتالي $k = 3$

تمرين 23:

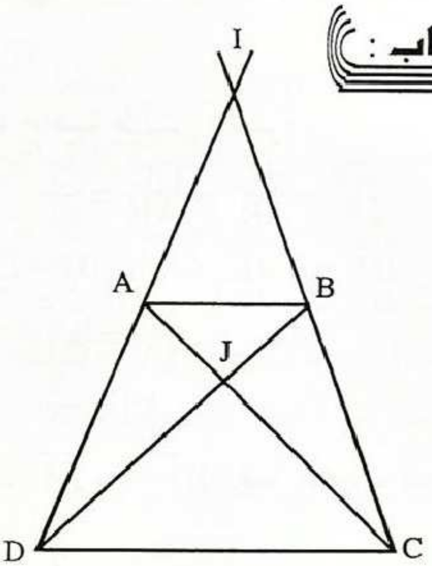
ABCD شبه منحرف حيث :

$(AB) // (CD)$ و $AB = 3$ و $CD = 5$

1) – حدد مركز ونسبة التحاكي h الذي يحول A إلى D و يحول B إلى C.

2) – حدد مركز ونسبته التحاكي h' الذي يحول A إلى C و يحول B إلى D.

الجواب :



1) – نعتبر : $h(I,k)$

لدينا $h(B)=C$ و $h(A)=D$

إذن $\overrightarrow{IC}=k\overrightarrow{IB}$ و $\overrightarrow{ID}=k\overrightarrow{IA}$

إذن النقط I و A و D مستقيمية والنقط I و B و C مستقيمية وبالتالي $I\in(BC)$ و $I\in(AD)$

إذن I هي نقطة تقاطع (BC) و (ID)

لدينا حسب خاصية طاليس المباشرة في المثلث IDC :

$$\frac{ID}{IA}=\frac{IC}{IB}=\frac{DC}{AB}=\frac{5}{3}$$

وبما أن $\overrightarrow{ID}=k\overrightarrow{IA}$ فإن

$$\frac{ID}{IA}=|k|$$

إذن $|k|=\frac{5}{3}$ وبما أن $\overrightarrow{IA}$ و $\overrightarrow{ID}$ هما نفس المنحى فإن $k=\frac{5}{3}$

إذن $h\left(I,\frac{5}{3}\right)$

2) – نعتبر $h'(J,k')$

لدينا $h(B)=D$ و $h(A)=C$

إذن J هي نقطة تقاطع المستقيمين (AC) و (BD)

حسب خاصية طاليس المباشرة

لدينا $\frac{JD}{JA}=\frac{JC}{JB}=\frac{DC}{AB}=\frac{5}{3}$

لدينا $h(B)=D$ إذن $\overrightarrow{JD}=k'\overrightarrow{JB}$

إذن $\frac{JD}{IA}=|k'|$

أي أن $|k'|=\frac{5}{3}$

وبما أن $\overrightarrow{JB}$ و $\overrightarrow{JD}$ هما منحيين متعاكسين

فإن $k'=-\frac{5}{3}$

إذن $h'\left(J,-\frac{5}{3}\right)$

تمرين 24:

لتكن A و B نقطتين ثابتتين من (P) نعتبر التطبيق f الذي يربط كل نقطة M بالنقطة M' بحيث : $\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$

أثبت أن f تحاك مركزه I منتصف [AB] وحدد نسبته.

الجواب :

$f(M)=M'$ يعني $\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$ يعني

$$\overrightarrow{MM'}=3\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{MI}+3\overrightarrow{IB}$$

يعني $\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IM'}=6\overrightarrow{MI}$

يعني $\overrightarrow{IM'}=6\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{MI}$

يعني $\overrightarrow{IM'}=-5\overrightarrow{IM}$

إذن f هو التحاكي الذي نسبته $k=-5$ ومركزه I منتصف [AB].

تمرين 25:

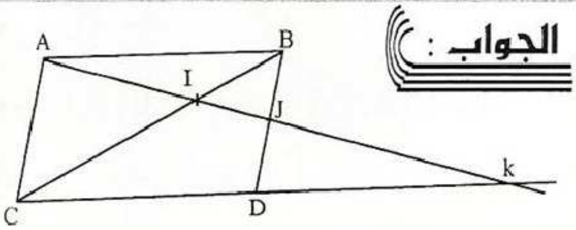
لتكن ABCD متوازي الأضلاع و I نقطة معلومة تنتمي إلى [BD].

لتكن h التحاكي الذي مركزه I و يحول B إلى D.

1 – حدد $h(A)$ و $h(J)$

2 – أثبت أن $IA^2=IJ\times IK$.

الجواب :



لدينا $h(B) = D$

إذن صورة المستقيم (AB) هي المستقيم المار من D والموازي لــ (AB) أي (DC)

ولدينا $I \in (AI)$ إذن $h((AI)) = (AI)$

لدينا $A \in (AI) \cap (AB)$

إذن $h(A)\, h \in ((AI)) \cap h((AB))$

يعني $h(A) \in h(AI) \cap (DC)$

ولدينا $(AI) \cap (DC) = \{k\}$ وبالتالي

$h(A) = k$ لدينا $h((AI)) = (AI)$

لأن $h \in (AI)$

لدينا $h(B) = D$ إذن صورة (BC) هي المستقيم المار من D والموازي لــ (BC) أي المستقيم (AD).

إذن $h((BC)) = (AD)$

لدينا $J \in (BC) \cap (AD)$

إذن $h(J) \in h((BC) \cap (AI))$

يعني $h(J) \in (AD) \cap (AI)$

لدينا $\{A\}$ $(AD) \cap (AI)$ ومنه $h(J) = A$

(2 – لدينا $h(A) = k$ يعني $\overrightarrow{Ik} = k\overrightarrow{IA}$ حيث k نسبة التحاكي h.

$h(J) = A$ يعني $\overrightarrow{IA} = k\overrightarrow{IJ}$

ومنه $Ik = |k|\, IA$ و $IA = |k|\, IJ$

إذن $\frac{Ik}{IA}$ $\frac{IA}{IJ}$ وبالتالي $IA^2 = IJ \times IK$

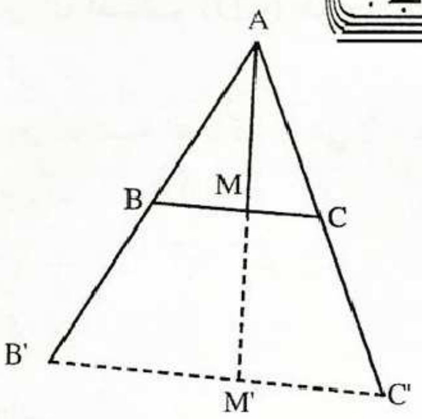
تمرين 26:

لتكن ABC مثلث نربط كل نقطة M من القطعة $[BC]$ بنقطة M' حيث M منتصف $[AM']$.

1 – بين أنه يوجد تحاك h حيث $h(M) = M'$ لكل M من القطعة $[BC]$.

2 – استنتج مجموعة النقط M' عندما تتغير M على $[BC]$.

الجواب :



1 – لدينا M منتصف $[AM']$

ومنه $\overrightarrow{AM'} = 2\overrightarrow{AM}$

أي أن M' صورة M بالتحاكي h الذي مركزه A ونسبته 2.

2 – إذا كانت M تتغير على القطعة $[BC]$ فإن M' تتغير على صورة القطعة $[BC]$ بالتحاكي $h(A,2)$ أي أن M' تتغير على القطعة $[B'C']$

حيث : $\overrightarrow{AC'} = 2\overrightarrow{AC}$ ، $\overrightarrow{AB'} = 2\overrightarrow{AB}$

أي أن B منتصف $[AB']$ و C منتصف $[AC']$

إذن مجموعة النقط M' عندما تتغير M على القطعة $[BC]$ هي القطعة $[B'C']$.

تمرين 27:

ABCD متوازي الأضلاع I و J

بحيث $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{DC}$ و $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

1 – أنشئ الشكل.

2 – بين أن المستقيم (BJ) هو صورة المستقيم (AI) بالإزاحة ذات المتجهة $\overrightarrow{AB}$.

3 – ليكن h التحاكي الذي مركزه I بحيث $h(B) = C$

أ – بين أن المستقيم (CD) هو صورة (AB) بالتحاكي h.

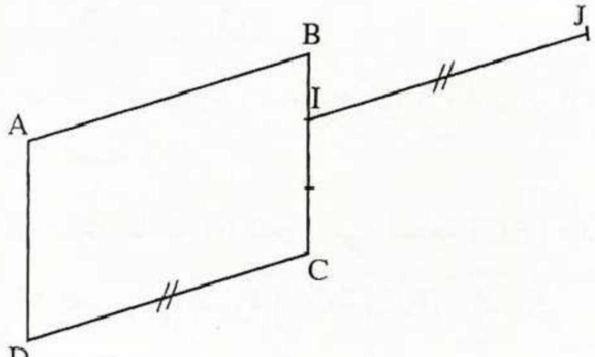
ب – بين أن نسبة التحاكي h هي $k = -2$.

ج – بين أن : $\overrightarrow{kI} = 2\overrightarrow{AB}$

و $\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{Ck}$ حيث k هي صورة J بالتحاكي h.

الجواب :

1) –



2) – لتكن t الإزاحة التي متجهتها $\overrightarrow{AB}$ لدينا $t(A) = B$ ولدينا : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{IJ}$ إذن ABJI متوازي الأضلاع ومنه (AI) // (BJ)

وحيث أن صورة المستقيم (AI) بالإزاحة t هي مستقيم يوازيه ويمر من B أي (BJ)

ومنه $t((AI)) = (BJ)$

3) – أ – لدينا $h(B) = C$ ونعلم أن صورة المستقيم (AB) بالتحاكي h هي مستقيم يمر من C ويوازي (AB) أي (DC)

ومنه $h((AB)) = (CD)$

ب – لدينا $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

يعني $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{CI} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$

يعني $\frac{1}{3}\overrightarrow{CI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{CI} = 2\overrightarrow{IB}$

يعني $\overrightarrow{IC} = -2\overrightarrow{IB}$

إذن التحاكي الذي مركزه I ويحول B إلى C نسبته $k = -2$

ج – لدينا $h(J) = k$

يعني $\overrightarrow{Ik} = -2\overrightarrow{IJ}$

يعني $\overrightarrow{Ik} = -2\overrightarrow{DC}$

يعني $\overrightarrow{Ik} = -2\overrightarrow{AB}$

يعني $\boxed{\overrightarrow{kI} = 2\overrightarrow{AB}}$

لدينا $h(J) = k$ و $h(B) = C$

إذن حسب الخاصية المميزة للتحاكي

فإن $\overrightarrow{Ck} = -2\overrightarrow{BJ}$

يعني $\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{Ck}$

ونعلم أن $\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AI}$

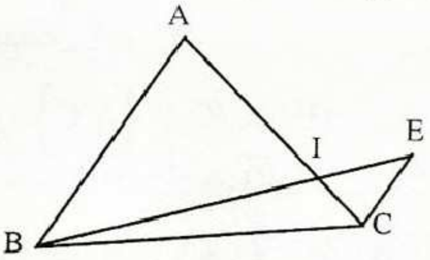
إذن $\boxed{\overrightarrow{AI} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{Ck}}$

تمرين 28:

ليكن ABC مثلثا و E النقطة التي تحقق :

$\overrightarrow{CE} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

النقطة I هي تقاطع (BE) و (CA) (أنظر الشكل) نعتبر التحاكي h الذي مركزه I ويحول النقطة A إلى النقطة C.



1 – أ – حدد صورة النقطة B بالتحاكي h.

ب – استنتج نسبة التحاكي h.

2 – المستقيم المار من النقطة E والموازي للمستقيم (BC) يقطع المستقيم (AI) في النقطة J. بين أن صورة النقطة C بالتحاكي h هي النقطة J.

الجواب :

1) – أ – لدينا مركز التحاكي h هو النقطة I

لدينا $I \in (BI)$ ومنه $h((BI)) = (BI)$

لدينا $h(A) = C$ إذن صورة المستقيم (AB) هي مستقيم يمر من C ويوازي (AB) أي (EC) ومنه $h((AB)) = (EC)$

لدينا $B \in (BI) \cap (AB)$

إذن $h(B) \in h((BI)) \cap h((AB))$

أي $h(B) \in (BI) \cap (EC)$

وبما أن $(BI) \cap (EC) = \{E\}$ فإن $h(B) = E$

ب – لتكن k نسبة التحاكي h

لدينا $h(A) = C$ و $h(B) = E$ إذن حسب الخاصية المميزة للتحاكي h هي $\overrightarrow{CE} = k\,\overrightarrow{AB}$

ولدينا $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ إذن نسبة التحاكي h هي $k = \frac{1}{3}$

2 – لدينا $I \in (CI)$ إذن $h((CI)) = (CI)$

و $h(B) = E$ إذن صورة المستقيم (BC) بـ h هي مستقيم المار من E والموازي لـ (BC) أي المستقيم (EJ) لدينا $C \in (CB) \cap (CI)$

إذن $h(C) \in h((CB)) \cap ((CI))$

أي $h(C) \in (EJ) \cap (CI) = \{J\}$

وبالتالي $h(C) = J$

تمرين 29:

A و B و C ثلاث نقط حيث B منتصف القطعة [AC]. (Δ) مستقيم مار من القطعة A ويخالف (AB) وغير عمودي على (AB). B' و C' هما المسقطان العموديان على التوالي للنقطتين B و C على (Δ). I نقطة تقاطع المستقيمين (BC') و (B'C) وليكن h التحاكي الذي مركزه I ويحول B إلى C'.

1) – حدد $h(B')$ واحسب k نسبة التحاكي h.

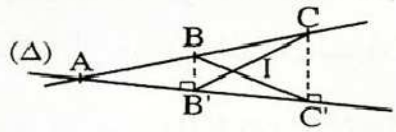
2) – أ – حدد العدد الحقيقي α حيث $\overrightarrow{BI} = \alpha\,\overrightarrow{BC'}$.

ب – حدد مجموعة النقط (E) للنقطة C' عندما تتغير على (Δ).

ج – حدد مجموعة النقط (F) للنقطة I عندما يتغير (Δ).

3) – أنشئ الشكل علما أن AB = 4 cm.

الجواب :



1) – لدينا $h(B) = C'$ إذن $\overrightarrow{IC'} = k\,\overrightarrow{IB}$

حسب مبرهنة طاليس المباشرة

لدينا : $\overrightarrow{IC'} = k\,\overrightarrow{IB}$

أي أن $h(B') = C$

لدينا $h(B) = C'$ و $h(B') = C$

إذن حسب الخاصية المميزة للتحاكي فإن :

$$\overrightarrow{CC'} = k\,\overrightarrow{B'B}$$

إذن $|k| = \dfrac{CC'}{B'B}$

نعتبر المثلث ACC'.

لدينا B منتصف $[AC]$ و $(BB') \,//\, (CC')$

إذن B' منتصف $[AC']$ و $CC' = 2\,B'B$

ومنه $\dfrac{CC'}{B'B} = 2$

إذن $|k| = 2$ وبما أن $\overrightarrow{B'B}$ و $\overrightarrow{CC'}$ لهما منحيان متعاكسان

فإن $k = -2$

2) – أ –

لدينا $h(B) = C'$ إذن $\overrightarrow{IC'} = k\,\overrightarrow{IB}$

ومنه $\overrightarrow{IC'} = -2\,\overrightarrow{IB}$

أي أن $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BC'} = -2\,\overrightarrow{IB}$

إذن $3\,\overrightarrow{IB} = -\,\overrightarrow{BC'}$

ومنه $\overrightarrow{IB} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{BC'}$

إذن $\alpha = \dfrac{1}{3}$

ب – لدينا الزاوية $A\hat{C'}C$ قائمة و A و C نقطتان ثابتتان إذن عندما يتغير المستقيم (Δ) فإن النقطة C' تتغير على الدائرة $(\mathscr{C})$ التي أحد أقطارها $[AC]$.

النقطة $C' \neq A$ و $C' \neq C$

إذن مجموعة النقط C' هي الدائرة $(\mathscr{C})$ محرومة من النقطتين A و C.

وبالتالي $(E) = (\mathscr{C}) \setminus \{A,C\}$

ج – لدينا $\overrightarrow{IB} = \dfrac{1}{3}\,\overrightarrow{BC'}$

أي أن I صورة C' بالتحاكي $h'\left(B, \frac{1}{3}\right)$

إذن عندما تتغير النقطة C' على الدائرة $(\mathscr{C}) \setminus \{A,C\}$ فإن النقطة I تتغير على الدائرة $(\mathscr{C}')$ صورة $(\mathscr{C})$ بالتحاكي $h'\left(B, \frac{1}{3}\right)$ محرومة من النقطتين A' و B' حيث :

$h'(A) = A'$ و $h'(C) = C'$

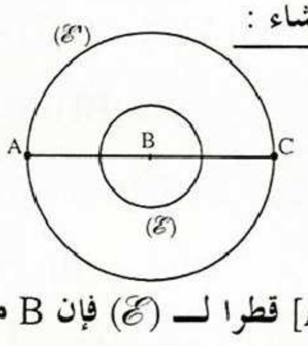
ولدينا شعاع الدائرة $(\mathscr{C}')$ هو :

$$r' = \frac{1}{3} \times r$$

حيث r شعاع الدائرة $(\mathscr{C})$ ومركز $(\mathscr{C}')$ هو صورة مركز $(\mathscr{C})$.

إذن $F = (\mathscr{C}') \setminus \{A',C'\}$

3) – الإنشاء :



بما أن $[AC]$ قطرا لـ $(\mathscr{C})$ فإن B مركزها.

مركز $(\mathscr{C}')$ هو النقطة B'

حيث $h'(B) = B'$

أي أن $h'(B) = B$ شعاع $(\mathscr{C}')$ هو :

$$r' = \frac{1}{3} \times r = \frac{1}{3} \times 4 = \frac{4}{3}$$

إذن النقط A و Q و P مستقيمية.

2) - لدينا $S_{(AB)}(M) = P$ و $S_{(AB)}(A) = A$

إذن : $AM = AP$ ①

لدينا كذلك : $S_{(AC)}(M) = Q$

و $S_{(AC)}(A) = A$

إذن : $AM = AQ$ ②

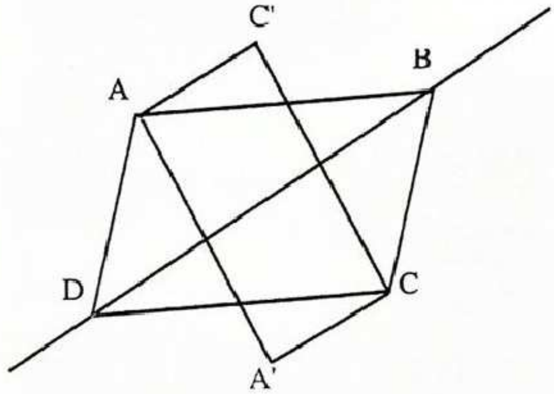
من ① و ② نستنتج أن $AP = AQ$

وبما أن A و P و Q مستقيمية فإن A منتصف [PQ].

تمرين 2 :

ليكن ABCD متوازي الأضلاع 'A و 'B على التوالي صورتا A و C بالثماثل المحوري الذي محوره (BD) بين أن 'AC'CA مستطيل.

الجواب :



لدينا ABCD متوازي الأضلاع ليكن I منتصف القطرين [AC] و [BD].

لدينا $S_{(BD)}(A) = A'$ و $S_{(BD)}(C) = C'$

و $S_{(BD)}(I) = I$ لأن $I \in (BD)$.

وبما أن التماثل المحوري يحافظ على المنتصف وبما أن I منتصف [AC] فإن I منتصف [A'C'] إذن [AC] و [A'C'] لهما نفس المنتصف I ومنه AC'CA متوازي الأضلاع. (1)

لدينا : $S_{(BD)}(A') = A$ و $S_{(BD)}(C) = C'$

إذن صورة المستقيم (A'C) بالتماثل المحوري $S_{(BD)}$ هي المستقيم (AC').

وبما أن $(A'C) /\!/ (AC')$ فإن

$(BD) /\!/ (AC') /\!/ (A'C)$ وبما أن

$(BD) \perp (CC')$ فإن و $(AC') \perp (CC')$ (2)

من (1) و (2) فإن 'AC'CA مستطيل.

تمرين 3:

ABC مثلث متساوي الساقين رأسه A.

ننشئ خارج هذا المثلث : المثلثين المتساوي الأضلاع AB'C و AC'B.

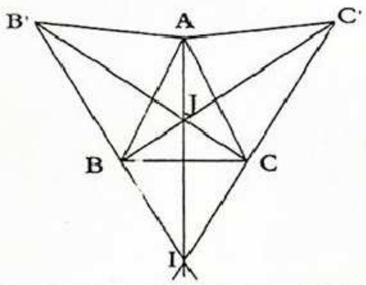
(BB') و (CC') يتقاطعان في I و (B'C) و (BC') يتقاطعان في J.

1) – أنشئ الشكل.

2) – باستعمال تماثل محوري، بين أن I و J و A مستقيمية.

الجواب :

1) -



2) - بما أن ABC مثلث متساوي الساقين في A فإن (Δ) واسط القطعة [BC] هو محور تماثل له.

لدينا $S_{(\Delta)}(B) = C$ و $S_{(\Delta)}(B') = C'$ لأن ABB' و ACC' متماثلان بالنسبة لـ (Δ).

وبما أن $(B'B) \cap (CC') = \{I\}$ فإن :
$I \in (\Delta)$

لدينا كذلك $S_{(\Delta)}(C) = B$ و $S_{(\Delta)}(B') = C'$

إذن (CB') و (BC') متماثلان بالنسبة لـ (Δ)

وبما أن $(BC') \cap (B'C) = \{J\}$ فإن $J \in (\Delta)$

ولدينا $A \in (\Delta)$ إذن النقط A و I و J مستقيمية.

تمرين 4 :

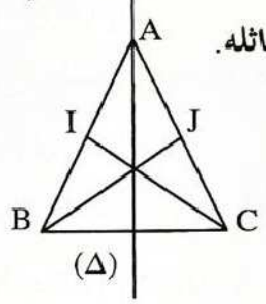
1) - ABC مثلث متساوي الساقين في A و I منتصف [AB] و J منتصف [AC].
باستعمال تماثل محوري : بين أن : BJ = CI

2) - ABCD معين و M نقطة تنتمي إلى [BC] H و K هما على التوالي مسقطي M على المستقيمين (AB) و (AD) باستعمال تماثل محوري بين أن : MH = Mk

الجواب :

1) - ABC مثلث متساوي الساقين في A .

* نعتبر (Δ) محور تماثله.



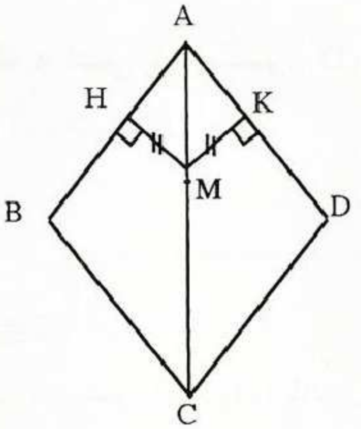
لدينا $S_{(\Delta)}(A) = A$ و $S_{(\Delta)}(B) = C$

إذن صورة القطعة [AB] بـ $S_{(\Delta)}$ هي القطعة [AC] وبما أن I منتصف [AB] و $S_{(\Delta)}$ يحافظ على المنتصف فإن $S_{(\Delta)}(I) = J$

ولدينا $S_{(\Delta)}(B) = C$ أي أن $S_{(\Delta)}(C) = B$

إذن CI = BJ لأن التماثل المحوري يحافظ على المسافة.

2) -



(AC) محور تماثل لـ ABCD إذن

$S_{(BD)}((AB)) = (AD)$

نضع : $S_{(AC)}(H) = H'$

إذن $H' \in (AD)$ ①

ولدينا : $S_{(AC)}(M) = M$

و $S_{(AC)}(A) = A$ و $S_{(AC)}(H) = H'$

إذن صورة الزاوية $A\hat{H}M$ بـ $S_{(AC)}$ هي الزاوية $A\hat{H'}M$.

إذن $A\hat{H'}M = 90°$ ②

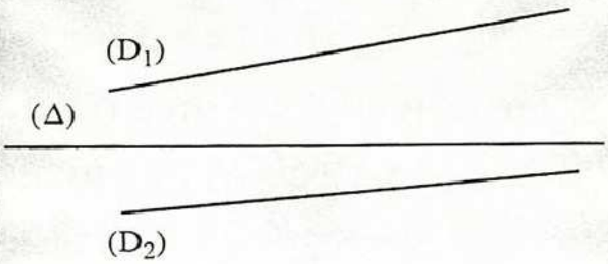
من ① و ② نستنتج أن H' = K إذن

$S_{(AC)}(H) = K$ و $S_{(AC)}(M) = M$

إذن MH = MK لأن التماثل المحوري يحافظ على المسافة.

تمرين 5:

نعتبر الشكل التالي :



أوجد نقطة A تنتمي إلى المستقيم (D_1) ونقطة B تنتمي إلى المستقيم (D_2) حيث :

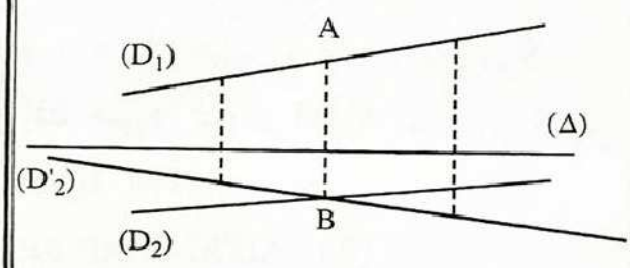
$B = S_{(\Delta)}(A)$

الجواب :

إذا كانت A تنتمي إلى (D_1) فإن $S_{(\Delta)}(A)$ تنتمي إلى (D'_1) المستقيم حيث :

$S_{(\Delta)}\big((D_1)\big) = (D'_1)$ إي أن $B \in (D'_1)$ إذن B هي نقطة تقاطع (D'_1) و (D_2).

الإنشاء :



ننشئ (D'_1) مماثل (D_1) بالنسبة لـ (Δ) ثم نحصل على النقطة B نقطة تقاطع (D'_1) و (D_2) ومن ثم ننشئ العمودي على (Δ) والمار من B ، هذا المستقيم الأخير يقطع (D_1) في A.

تمرين 6:

A و B و C ثلاث نقط غير مستقيمية و M نقطة من (BC) مخالفة ل B و C . (Δ) هو المستقيم الذي يمر من A ويوازي (BC).

المستقيم الموازي لـــ (AB) و المار من M يقطع (Δ) في D والمستقيم الموازي لـــ (AC) والمار من M يقطع (Δ) في E.

1) - أنشئ الشكل .

2) - لتكن I منتصف القطعة [AM].

أ – حدد صورة المستقيمن (CA) و (CM) بـــ S_I.

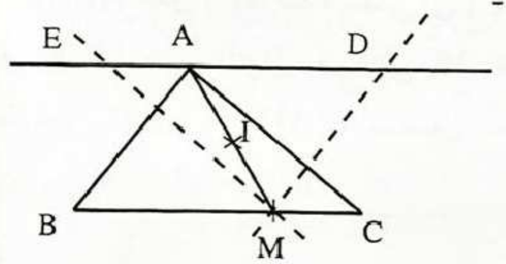
ب – استنتج صورة النقطة C بـــ S_I.

3) - بين أن : $S_I(B) = D$

واستنتج أن $(BE) /\!/ (CD)$.

الجواب :

1) -



2) - أ – لدينا I منتصف [AM].

إذن $S_I(A) = M$

إذن صورة المستقيم (CA) هو المستقيم المار من M والموازي لـــ (CA).

إذن لدينا $S_I\big((CA)\big) = (EM)$

لدينا $S_I(A) = M$ إذن $S_I(M) = A$

إذن صورة المستقيم (CM) بـــ S_I هو المستقيم المار من A والموازي لـــ (CM)

أي أن $S_I\left((CM)\right) = (\Delta)$

ب – لدينا : $(CM) \cap (CA) = \left\{C\right\}$

و (EM) و (Δ) صورتي (CA) و (CM) على التوالي بـــ S_I.

إذن صورة C بـــ S_I هي نقطة تقاطع (Δ) و (EM) أي أن : $S_I(C) = E$

3) – بنفس الطريقة نبين أن :

$S_I\left((BM)\right) = (\Delta)$ و $S_I(AB) = (MD)$

ولدينا $(BM) \cap (AB) = \left\{B\right\}$

إذن صورة B بـــ S_I هي نقطة تقاطع المستقيمين (MD)و (Δ) أي أن : $S_I(B) = D$

لدينا $S_I(C) = E$ إذن $S_I(E) = C$

ولدينا $S_I(B) = D$

إذن $S_I\left((BE)\right) = (CD)$

وبالتالي : $(BE) \parallel (CD)$

تمرين 7:

$ABCD$ متوازي الأضلاع مركزه O.

M و N نقطتان على (AB) و (CD) بحيث :

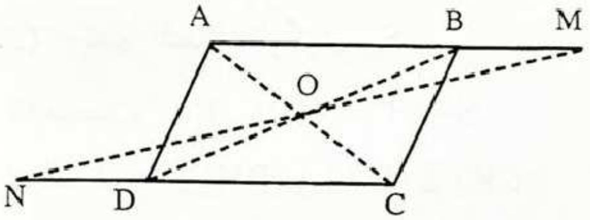
$\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CN} = k\,\overrightarrow{CD}$

1) – أنشئ الشكل.

2) – بين أن : $S_O(M) = N$

الجواب :

(1



2) – لدينا $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{CN} = k\,\overrightarrow{CD}$

إذن $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{NC} = k\,\overrightarrow{DC}$

وبما أن $ABCD$ متوازي الأضلاع فإن $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

وبالتالي : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{NC}$

إذن الرباعي $AMCN$ متوازي الأضلاع ومنه للقطعتين $[AC]$ و $[NM]$ نفس المنتصف O.

إذن O منتصف القطعة $[MN]$ أي أن :

$S_O(M) = N$

تمرين 8:

ABC مثلثا وO منتصف القطعة $[BC]$.

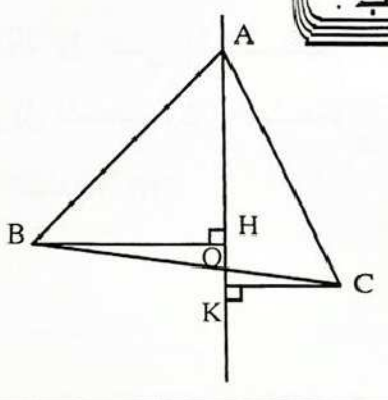
H المسقط العمودي للنقطة B على المستقيم (AO) و K المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AO).

1) – أنشئ الشكل.

2) – بين أن الرباعي $BHCK$ متوازي الأضلاع.

الجواب :

– (1



2) – نعتبر التماثل المركزي S_O

O منتصف $[BC]$ إذن $S_O(B) = C$

لدينا $(OA) \perp (BH)$ و $(OA) \perp (CK)$

إذن $(BH) /\!/ (CK)$

وبما أن $S_O(B) = C$ فإن صورة المستقيم (BH) بالتماثل المركزي S_O هو المستقيم المار من C والموازي لـ (BH) أي أن :

$$S_O\big((BH)\big) = (CK)$$

ولدينا : $S_O(OA) = (OA)$ وبما أن :

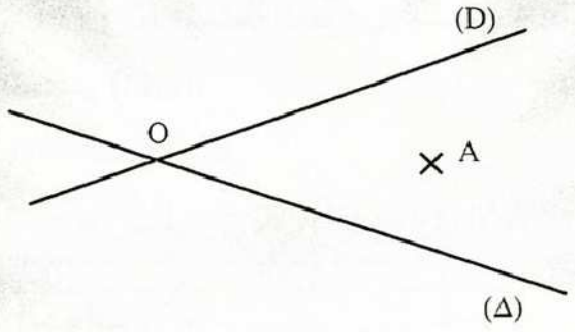
$$(BH) \cap (OA) = \{H\}$$

و $(OA) \cap (CK) = \{K\}$

فإن $S_O(H) = K$ إذن O منتصف (HK) وبالتالي الرباعي $BHCK$ متوازي الأضلاع.

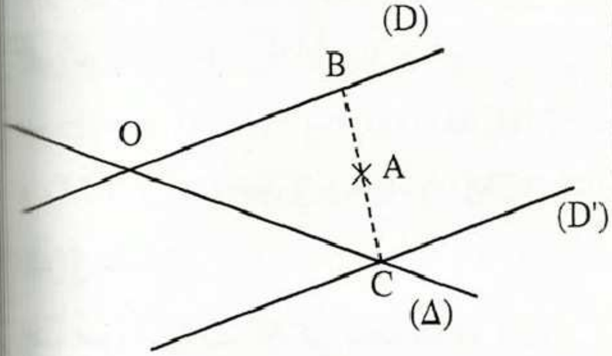
تمرين 9:

نعتبر الشكل التالي :



أنشئ نقطة B تنتمي إلى المستقيم (D) ونقطة C تنتمي إلى المستقيم (Δ) حيث تكون النقطة A منتصف القطعة $[BC]$.

الجواب :



* ننشئ (D') صورة (D) بالتماثل S_A.

أي أن : $S_A\big((D)\big) = (D')$)

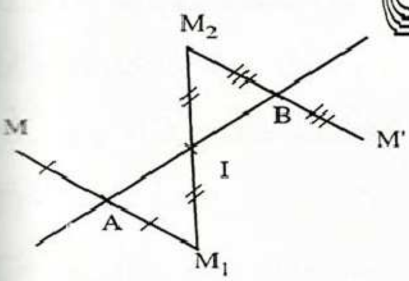
(D') يقطع (Δ) في نقطة C و (AC) يقطع المستقيم (D) في النقطة B. وهكذا نحصل على النقطتين B و C حيث A منتصف القطعة $[BC]$.

تمرين 10:

A و B نقطتين مختلفتين و I منتصف القطعة $[AB]$ نعتبر التماثلات المركزية S_A و S_B و S_I التي مراكزها A و B و I على التوالي.

أثبت أن : $S_B \circ S_I \circ S_A = S_A$.

الجواب :



لتكن M نقطة من المستوى (P).

M_1 صورة M بالتماثل S_A و M_2 صورة M_1 بـ S_I و M' صورة M_2 بـ S_B.

أي $S_A(M) = M_1$ و $S_I(M_1) = M_2$

و $S_B(M_2) = M'$

إذن $S_B \circ S_I \circ S_A(M) = M'$

لدينا $S_A(M) = M_1$ إذن $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AM_1}$ (1)

لدينا $S_B(M_2) = M'$ إذن $\overrightarrow{M_2B} = \overrightarrow{BM'}$ (2)

كذلك $S_A(M_1) = M_2$ يعني أن I منتصف $[M_1M_2]$ ولدينا I منتصف [AB].

إذن قطرا الرباعي AM_1BM_2 لهما نفس المنتصف I ومنه AM_1BM_2 متوازي الأضلاع وبالتالي $\overrightarrow{AM_1} = \overrightarrow{M_2B}$ (3) من العلاقات (1) و (2) و (3) فإن : $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{BM'}$

أي أن MAM'B متوازي الأضلاع وبالتالي فإن قطراه لهما نفس المنتصف وحيث I منتصف [AB] فإن I منتصف [MM'] وهذا يعني أن $S_I(M) = M'$ وحيث أن

$S_B \circ S_I \circ S_A(M) = M'$ لكل $M \in (P)$

فإن : $S_B \circ S_I \circ S_A = S_I$

تمرين 11 :

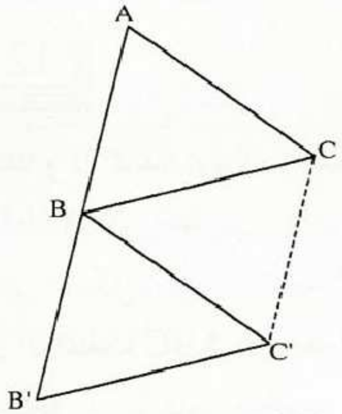
ABC مثلث أنشئ صور هذا المثلث بالإزاحات $t_{\overrightarrow{AB}}$ و $t_{\overrightarrow{BC}}$ و $t_{\overrightarrow{CA}}$.

الجواب :

لدينا $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$

$t_{\overrightarrow{AB}}(B) = B'$ يعني $BB' = \overrightarrow{AB}$

$t_{\overrightarrow{AB}}(C) = C'$ يعني $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB}$

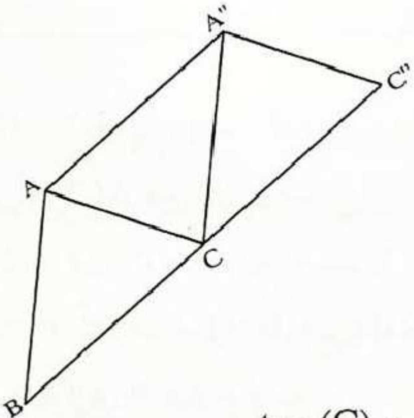


صور المثلث ABC بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$ هي المثلث BB'C'.

لدينا $t_{\overrightarrow{BC}}(B) = C$

$t_{\overrightarrow{BC}}(A) = A''$ يعني $\overrightarrow{AA''} = \overrightarrow{BC}$

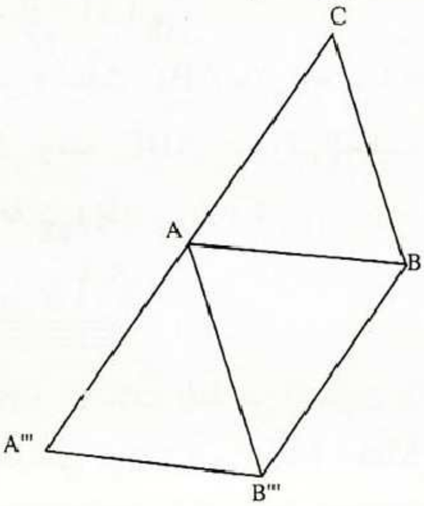
$t_{\overrightarrow{BC}}(C) = C''$ يعني $\overrightarrow{CC''} = \overrightarrow{BC}$



لدينا $t_{\overrightarrow{BC}}(C) = A$

$t_{\overrightarrow{CA}}(A) = A'''$ يعني $\overrightarrow{AA'''} = \overrightarrow{CA}$

$t_{\overrightarrow{CA}}(B) = B'''$ يعني $\overrightarrow{BB'''} = \overrightarrow{CA}$



تمرين 12:

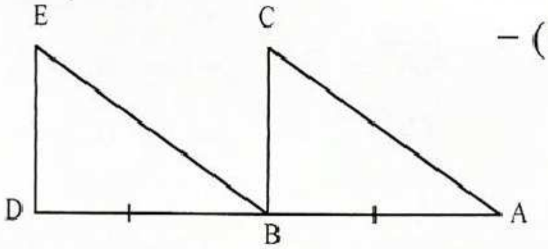
ABC مثلثا و D مماثلة A بالنسبة للنقطة B و E صورة النقطة B بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$.

1) – أنشئ الشكل.

2) – بين أن المثلث ABC هو صورة المثلث BDE بإزاحة T يتم تحديد متجهتها.

الجواب :

1) –



لدينا $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = E$ إذن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$ ومنه الرباعي ACEB متوازي الأضلاع.

2) – لدينا D مماثلة A بالنسبة لــ B إذن $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB}$ لدينا $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = E$ إذن الرباعي ACE متوازي الأضلاع ومنه :

$\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AB}$

إذن $t_{\overrightarrow{AB}}(B) = D$ و $t_{\overrightarrow{AB}}(C) = E$

وبما أن $t_{\overrightarrow{AB}}(A) = B$

فإن صورة المثلث ABC بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AB}}$ هو المثلث BDE. ومنه ABC صورة للمثلث BDE بالإزاحة $t_{\overrightarrow{BA}}$ إذن $T = t_{\overrightarrow{BA}}$

تمرين 13:

A و B و C ثلاث نقط من المستوى (P).

M نقطة تحقق العلاقة : $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

1) – بين أن M صورة النقطة A بالإزاحة $\overrightarrow{BC}$

2) – أ – أنشئ الشكل.

ب – أنشئ النقطة M' صورة النقطة B بالإزاحة $t_{\overrightarrow{AC}}$ وبين أن C منتصف [MM'].

الجواب :

1) – لدينا $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

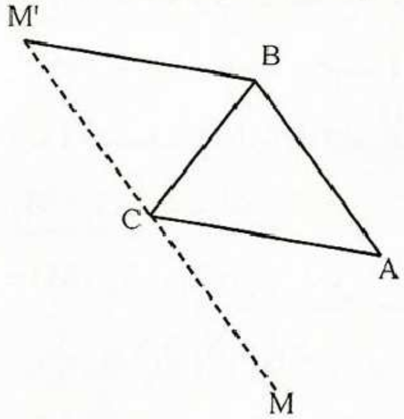
أي أن : $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$

إذن $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{0}$ ومنه $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

أي أن : $t_{\overrightarrow{BC}}(A) = M$

2) أ – لدينا $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{BC}$

إذن الرباعي BCMA متوازي الأضلاع.



ب – لدينا $t_{\overrightarrow{BC}}(A) = M'$

أي أن $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BM'}$

إذن الرباعي ACM'B متوازي الأضلاع.

ب – لدينا BCMA متوازي الأضلاع إذن :

$\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$ (1)

لدينا ACM'B متوازي الأضلاع إذن :

$\overrightarrow{CM'} = \overrightarrow{AB}$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CM'}$

إذن C منتصف القطعة [MM'].

تمرين 14:

لتكن A و B نقطتين مختلفتين من المستوى (P).
نربط كل نقطة M من المستوى بالنقطة M' بحيث :
$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{M'A} = \vec{0}$$
بين أن التطبيق f الذي يحول كل نقطة M بالنقطة M' هو إزاحة حدد متجهتها.

الجواب :

$f(M) = M'$ يعني
$$2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{AB} \quad 2\overrightarrow{M'A} = \vec{0}$$
يعني $2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AM'} + 3\overrightarrow{AB} - \vec{0}$

يعني $2\overrightarrow{MM'} = -3\overrightarrow{AB}$

يعني $\overrightarrow{MM'} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

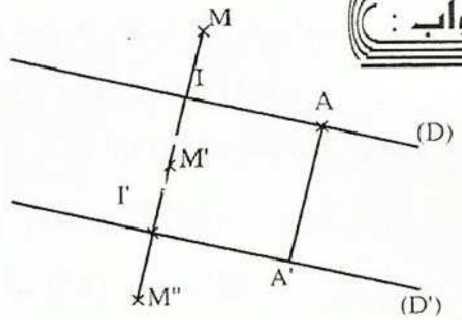
إذن f إزاحة متجهتها $\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

أي $f = t_{\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}}$

تمرين 15:

لتكن (D) و (D') مستقيمين متوازيين. نعتبر نقطة A من (D) و A' نقطة من (D') بحيث يكون المستقيم (AA') عمودي على المستقيم (D). ليكن $S_{(D)}$ الثماثل المحوري الذي محوره (D). و $S_{(D')}$ هو الثماثل المحوري الذي محوره (D') أثبت أن : $S_{(D')} o S_{(D)} = t_{2\overrightarrow{AA'}}$

الجواب :



لتكن $M \in (P)$

M' صورة M بالثماثل المحوري $S_{(D)}$

أي $S_{(D)}(M) = M'$

M'' صورة M' بالثماثل المحوري $S_{(D')}$

أي $S_{(D')}(M') = M''$

إذن $S_{(D')} o S_{(D)}(M) = M''$

لدينا $\overrightarrow{MM''} - \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{I'M''}$
$$= \overrightarrow{IM'} + \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{M'I'}$$
$$= \overrightarrow{II'} + \overrightarrow{II'} = 2\overrightarrow{II'}$$
IAA'I' مستطيل إذن $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{AA'}$

ومنه $\overrightarrow{MM''} \quad 2\overrightarrow{AA'}$ أي
$$t_{2\overrightarrow{AA'}}(M) = M''$$
وبالتالي $S_{(D')} o S_{(D)} = t_{2\overrightarrow{AA'}}$

تمرين 16:

1) – لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بين أن :
$$t_{\vec{u}} o t_{\vec{v}} = t_{\vec{u}+\vec{v}}$$
2) – ماهي طبيعة الرباعي ABCD علما أن :
$$t_{\overrightarrow{BD}} o t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{BC}}$$

الجواب :

1) – لتكن M نقطة من المستوى.

M_1 صورة M بالإزاحة $t_{\vec{v}}$ أي $t_{\vec{v}}(M) = M_1$

M_2 صورة M1 بالإزاحة $t_{\vec{u}}$ أي
$$t_{\vec{u}}(M_1) = M_2$$
إذن $t_{\vec{u}} o t_{\vec{v}}(M) = M_2$ (1)

وهذا يعني أن $t_{\vec{u}+\vec{v}}(M) = M_2$ (2)

من (1) و (2) نستنتج أن :
$$t_{\vec{u}} o t_{\vec{v}} - t_{\vec{u}+\vec{v}}$$
2) – لدينا $t_{\overrightarrow{BD}} o t_{\overrightarrow{AB}} = t_{\overrightarrow{BC}}$