الحساب التكاملي

I. تكامل دالة متصلة على مجال:

1. تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$ و F دالة أصلية لها على $[a,b]$.

تكامل f من a إلى b هو العدد الحقيقي : $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$

2. ملاحظات :

- نكتب $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b$
- يمكن تغيير x بأي متغير آخر مثلا : $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du = ...$
- الدالة $F : x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ هي الدالة الأصلية للدالة f التي تنعدم في a
- v قابلة للاشتقاق على E بحيث $v(E) \subset I$ و f متصلة على I فإن الدالة $\psi : x \mapsto \int_a^{v(x)} f(t)dt$ قابلة للاشتقاق على E و لدينا : $\psi'(x) = v'(x).f(v(x))$

3. خاصيات :

- $\int_a^a f(x)dx = 0$
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. خطانية التكامل :

خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $\left[a,b\right]$.لدينا :

- $\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$
- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

II. التكامل و الترتيب :

1. خاصية :

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $\left[a,b\right]$.لدينا :

- إذا كانت $f\geq 0$ على $\left[a,b\right]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \geq 0$
- إذا كانت $f\leq 0$ على $\left[a,b\right]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq 0$
- إذا كانت $f\leq g$ على $\left[a,b\right]$ فإن $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

2. القيمة المتوسطة :

تعريف و خاصية :

- لتكن f دالة متصلة على مجال $\left[a,b\right]$. العدد $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$ يسمى القيمة المتوسطة ل f على $\left[a,b\right]$
- يوجد على الأقل عدد c من $\left[a,b\right]$ بحيث : $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

III. تقنيات حساب التكامل :

أ. باستعمال دالة أصلية : **سبق الحديث عنها في بداية الدرس**

ب. باستعمال المكاملة بالأجزاء:

خاصية :

لتكن u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I حيث u' و v' متصلتان على I و a و b عنصرين من I لدينا :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

ج. باستعمال المكاملة بتغيير المتغير

خاصية و تعريف :

لتكن f دالة متصلة على مجال I و u دالة قابلة للاشتقاق على مجال $[\alpha,\beta]$ (بحيث $u([\alpha,\beta])=I$)

لدينا : $\int_\alpha^\beta f(u(x))u'(x)dx = \int_{u(\alpha)}^{u(\beta)} f(t)dt$ (و ذلك بوضع $t=u(x)$)

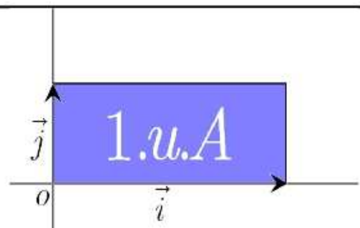
IV. حساب المساحات :

ليكن المستوى منسوبا إلى معلم متعامد $(O,\vec{i},\vec{j})$

وحدة المساحة $u.A$ **هي مساحة المستطيل المحدد بالنقطة** O

و المتجهتين $\vec{i}$ **و** $\vec{j}$

$1u.A = \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$



خاصية 1:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$

مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

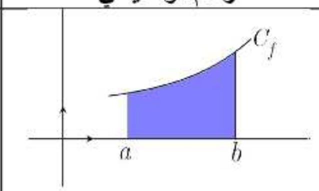
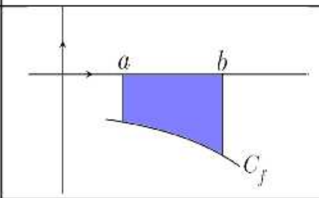
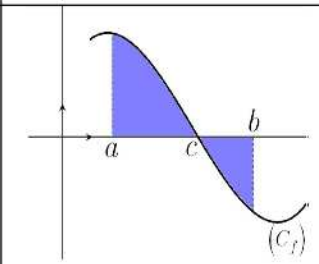
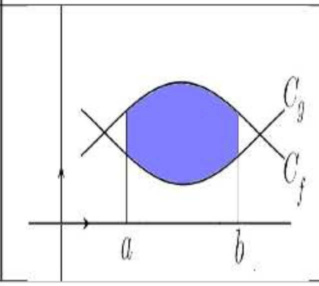
$$\left(\int_a^b |f(x)|dx\right)u.A$$

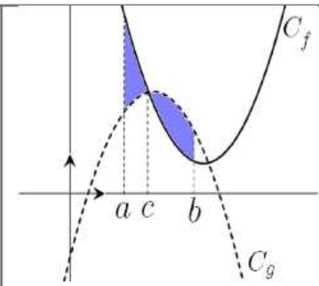
خاصية 2:

لتكن f و g دالتان متصلتان على المجال $[a,b]$
مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و (C_g) و محور الأفاصيل و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x=a$ و $x=b$ هي :

$$\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|dx\right)u.A$$

حالات خاصة :

رسم توضيحي	ملاحظات	مساحة الحيز الملون في الرسم هي:
	f موجبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b f(x)dx\right)u.A$
	f سالبة على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b -f(x)dx\right)u.A$
	• f موجبة على المجال $[a,c]$ و • f سالبة على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c f(x)dx+\int_c^b -f(x)dx\right)u.A$
	(C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,b]$	$\left(\int_a^b (f(x)-g(x))dx\right)u.A$

	• (C_f) يوجد فوق (C_g) على المجال $[a,c]$ و • (C_f) يوجد تحت (C_g) على المجال $[c,b]$	$\left(\int_a^c (f(x)-g(x))dx+\int_c^b (g(x)-f(x))dx\right)u.A$

٧. <u>حساب الحجوم :</u>

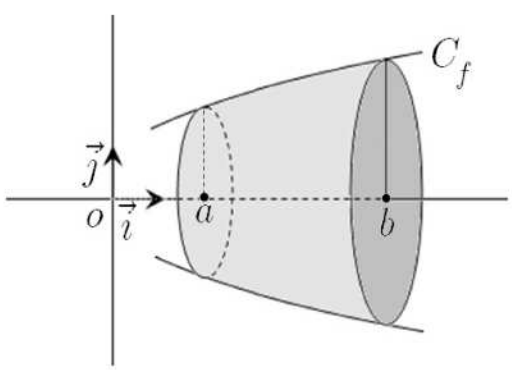
<u>خاصية 1:</u>

ليكن (Σ) مجسما محصورا بين المستويين (P_1) و (P_2) اللذين معادلتاهما على التوالي : $z=a$ و $z=b$ $(a<b)$
و لتكن $S(t)$ مساحة تقاطع المجسم (Σ) مع المستوى الذي معادلته $z=t$ حيث $a\le t\le b$
إذا كانت الدالة : $t\mapsto S(t)$ متصلة على المجال $[a,b]$ فإن V حجم المجسم (Σ) هو $V=\int_a^b S(t)dt$ بوحدة قياس الحجم.

<u>خاصية 2:</u>

حجم المجسم المولد بدوران (C_f) حول محور الأفاصيل دورة كاملة في مجال $[a,b]$ هو :

$V=\left[\int_a^b \pi(f(x))^2 dx\right]u.v$ حيث : $u.v$: وحدة الحجوم



VI. حساب بعض النهايات باستعمال التكامل :

خاصية

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a,b]$

نضع $s_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)$ و $S_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k.\frac{b-a}{n}\right)$ $\quad (n \in \mathbb{N}^*)$

لدينا المتتاليتان (s_n) و (S_n) متقاربتان و $\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} s_n = \int_a^b f(t)\,dt$