

# البنيات الجبرية

## 1) قانون التركيب الداخلي:

### قانون تركيب داخلي

لتكن  $E$  مجموعة  
كل تطبيق  $f$  من  $E \times E$  نحو  $E$  يسمى قانون تركيب داخلي في  $E$   
 $f : E \times E \rightarrow E$   
 $(x, y) \mapsto f(x, y)$   
 غالبا ما نرمز لـ  $f(x, y)$  بـ  $x * y$  أو  $x \text{Ty}$  أو  $x \perp y$   
 ونقول إن المجموعة  $E$  مزودة بقانون التركيب الداخلي  $*$  و نكتب  $(E, *)$

### جزء مستقر

لتكن  $E$  مزودة بقانون تركيب داخلي  $*$  و ليكن  $S$  جزءا من  $E$   
 نقول إن  $S$  جزء مستقر من  $(E, *)$  إذا كان :  $(\forall (x, y) \in S^2) x * y \in S$

### خصائص قوانين التركيب الداخلية

ليكن  $*$  قانون تركيب داخلي في  $E$   
 $(\forall (x, y, z) \in E^3) x * (y * z) = (x * y) * z \Leftrightarrow *$  تجميعي في  $E$   
 $(\forall (x, y) \in E^2) x * y = y * x \Leftrightarrow *$  تبادلي في  $E$

### العنصر المحايد

ليكن  $*$  قانون تركيب داخلي في  $E$  و  $e \in E$   
 $(\forall x \in E) e * x = x$  و  $x * e = x \Leftrightarrow e$  عنصر محايد في  $E$  بالنسبة للقانون  $*$   
 $\checkmark$  إذا كان للقانون  $*$  عنصرا محايدا فإنه وحيد

### العنصر المماثل

ليكن  $*$  قانون تركيب داخلي في  $E$  بحيث  $*$  يقبل عنصرا محايدا  $e$  و ليكن  $x \in E$   
 $\checkmark$   $x$  يقبل ممائلا في بالنسبة للقانون  $*$  إذا وفقط إذا وجد عنصر  $x'$  من  $E$  بحيث :  $x * x' = x' * x = e$   
 $\checkmark$  بالإضافة إذا كان القانون  $*$  تجميعي فإن  $x'$  وحيد  
 $\checkmark$  بالإضافة إذا كان القانون  $*$  تجميعي و كان  $x'$  مائل  $x$  و  $y'$  مماثل  $y$  فإن  $(x * y)' = y' * x'$

العنصر المنتظم

ليكن  $*$  قانون تركيب داخلي في  $E$ . نقول إن عنصرا  $a$  من  $E$  منتظم إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall (x, y) \in E^2) \begin{cases} a * x = a * y \Rightarrow x = y \\ x * a = y * a \Rightarrow x = y \end{cases}$$

(2) التشاكل:

❖ ليكن  $*$  قانون تركيب داخلي في  $E$  و  $T$  قانون تركيب داخلي في  $F$  نسمي تشاكل من  $(E, *)$  نحو  $(F, T)$  كل تطبيق  $f : E \rightarrow F$  يحقق :

$$(\forall (x, y) \in E^2) f(x * y) = f(x) T f(y)$$

- ❖ إذا كان  $f$  تشاكل من  $(E, *)$  نحو  $(F, T)$  فإن  $f(E)$  جزء مستقر من  $(F, T)$
- ❖ إذا كان  $f$  تشاكل من  $(E, *)$  نحو  $(F, T)$  و  $*$  تجميعي في  $E$  فإن  $T$  تجميعي في  $f(E)$
- ❖ إذا كان  $f$  تشاكل من  $(E, *)$  نحو  $(F, T)$  و  $*$  تبادلي في  $E$  فإن  $T$  تبادلي في  $f(E)$
- ❖ إذا كان  $e$  عنصر محايد في  $(E, *)$  فإن  $f(e)$  عنصر محايد في  $(f(E), T)$
- ❖ إذا كان  $x'$  مماثل  $x$  في  $(E, *)$  فإن  $(f(x'))' = f(x)$  هو مماثل  $f(x)$  في  $(f(E), T)$

(3) الزمرة:

لتكن  $G$  مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي  $*$  نقول إن  $(G, *)$  زمرة إذا وفقط إذا كان :

- $*$  تجميعي في  $G$
  - $*$  يقبل عنصرا محايدا
  - كل عنصر من  $G$  يقبل مائلا
- بالإضافة إذا كان القانون  $*$  تبادلي فإننا نقول أن  $(G, *)$  زمرة تبادلية

➤ لتكن  $(G, *)$  زمرة

- كل عنصر  $a$  من  $G$  منتظم
- ليكن  $a$  و  $b$  من  $G$  : كل من المعادلتين  $a * x = b$  و  $x * a = b$  تقبل حلا وحيدا في  $G$

زمرة جزئية

لتكن  $(G, *)$  زمرة و  $H$  جزء مستقر من  $(G, *)$   
 $(H, *)$  زمرة جزئية ل  $(G, *)$  إذا وفقط إذا كان  $(H, *)$  زمرة

لتكن  $(G, *)$  زمرة عنصرها المحايد  $e$  و لتكن  $H$  زمرة جزئية ل  $(G, *)$  ، لدينا :

- $H \neq \emptyset$
- $e$  هو العنصر المحايد في  $H$
- إذا كان  $x \in H$  و  $x'$  مماثل  $x$  في  $G$  فإن  $x' \in H$
- $x * y' \in H$  حيث  $(\forall (x, y) \in H^2)$   $y'$  مماثل  $y$  في  $G$

لتكن  $(G, *)$  زمرة و  $H$  جزء من  $G$  . تكون  $H$  زمرة جزئية ل  $(G, *)$  إذا وفقط إذا كان :

- $H \neq \emptyset$
- $x * y' \in H$  حيث  $(\forall (x, y) \in H^2)$   $y'$  مماثل  $y$  في  $G$

### تشاكل الزمر

لتكن  $(G, *)$  زمرة و لتكن  $E$  مزودة بقانون تركيب داخلي  $T$  و  $f : (G, *) \rightarrow (E, T)$  تشاكل لدينا ما يلي :

- $(f(G), T)$  زمرة
- إذا كانت  $(G, *)$  زمرة تبادلية فإن  $(f(G), T)$  زمرة تبادلية
- إذا كان  $f$  تشاكل شمولي ، فإن  $f(G) = E$  و منه  $(E, T)$  زمرة.

### (4) الحلقة :

### توزيعية قانون بالنسبة لآخر

لتكن  $E$  مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين  $*$  و  $T$

نقول أن  $T$  توزيعي بالنسبة ل  $*$  إذا وفقط إذا كان :

- $(\forall (x, y, z) \in E^3) \quad x T (y * z) = (x T y) * (x T z)$
- $(\forall (x, y, z) \in E^3) \quad (x * y) T z = (x T z) * (y T z)$

### الحلقة

لتكن  $A$  مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين  $*$  و  $T$

نقول أن  $(A, *, T)$  حلقة إذا وفقط إذا كان :

- $(A, *)$  زمرة تبادلية
- $T$  تجميعي
- $T$  توزيعي بالنسبة ل  $*$

- ✓ بالإضافة إذا كان القانون  $T$  تبادلي نقول إن الحلقة  $A$  تبادلية
- ✓ بالإضافة إذا كان للقانون  $T$  عنصر محايد ، نقول إن الحلقة  $A$  واحدة.

➤ لتكن  $(A, *, T)$  حلقة صفرها  $e$  ، لدينا :  $(\forall a \in A) aTe = eTa = e$   
 ➤ لتكن  $(A, *, T)$  حلقة صفرها  $e$  ونرمز ب  $a'$  مماثل  $a$  في  $(A, *)$  ، لدينا :  
 $(\forall (a, b) \in A^2) aTb' = a'Tb = (aTb)'$

### العناصر القابلة للمائلة

لتكن  $(A, *, T)$  حلقة حلقة واحدة وحدتها  $\mathcal{E}$   
 نقول إن عنصرا  $a$  من  $A$  قابلا للمائلة أو يقبل مقلوبا إذا كان له مماثلا بالنسبة للقانون  $T$  في  $A$

لتكن  $(A, *, T)$  حلقة حلقة واحدة وحدتها  $\mathcal{E}$  و لتكن  $U$  مجموعة العناصر لقابلة للمائلة ، لدينا : زمرة  $(U, T)$

### قواسم الصفر في حلقة

لتكن  $(A, *, T)$  حلقة صفرها  $0_A$   
 نقول إن عنصرا  $a$  من  $A$  قاسم للصفر إذا وفقط إذا كان :  $a \neq 0_A$  و يوجد  $b \neq 0_A$  بحيث :  $aTb = 0_A$

لتكن  $(A, *, T)$  حلقة  
 نقول إن الحلقة  $(A, *, T)$  كاملة إذا كانت لا تحتوي على قواسم للصفر

### (5) الجسم :

لتكن  $K$  مجموعة مزودة بقانوني تركيب داخليين  $*$  و  $T$   
 نقول إن  $(K, *, T)$  جسم إذا وفقط إذا كان :  
 • حلقة واحدة  $(K, *, T)$   
 • كل عنصر يخالف صفر الحلقة يقبل مماثلا بالنسبة ل  $T$

ليكن  $(K, +, \times)$  جسما  
 لدينا كل عنصر من  $K - \{0_A\}$  منتظم بالنسبة للضرب . يعني :

$$(\forall a \in K - \{0_A\})(\forall (x, y) \in K^2) : \begin{cases} ax = ay \Rightarrow x = y \\ xa = ya \Rightarrow x = y \end{cases}$$

ليكن  $(K, +, \times)$  جسما. لدينا :

$$(\forall (x, y) \in K^2) : x.y = 0_K \Rightarrow x = 0_K \text{ أو } y = 0_K$$

➤ كل جسم هو حلقة كاملة



ليكن  $(K, +, \times)$  جسما . نعتبر المعادلة  $a \times x = b$

- إذا كان  $a \neq 0_K$  فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا  $x = a^{-1}b$
- إذا كان  $a = 0_K$  و  $b \neq 0_K$  فإن المعادلة ليس لها حلا
- إذا كان  $a = 0_K$  و  $b = 0_K$  فإن  $S = K$

## 6 الفضاءات المتجهية الحقيقية :

### قانون تركيب خارجي

لتكن  $A$  و  $E$  مجموعتين غير فارغتين

$$A \times E \rightarrow E$$

$$f : (\alpha, x) \mapsto f(\alpha, x) \Leftrightarrow A \text{ ذو المعاملات في } E$$

قانون تركيب خارجي معرف على  $E$  ذو المعاملات في  $A$

عادة ما نرمز ل  $f(\alpha, x)$  ب  $\alpha x$  أو  $\alpha \cdot x$

### الفضاء المتجهي

لتكن  $E$  مجموعة مزودة بقانون تركيب داخلي  $*$  و بقانون تركيب خارجي  $\cdot$  معاملات في  $\mathbb{R}$   
نقول أن  $(E, *, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا كان :

1. زمرة تبادلية  $(E, *)$
2.  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E \quad (\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
3.  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall x \in E \quad (\alpha\beta) \cdot x = \alpha \cdot (\beta \cdot x)$
4.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2 \quad \alpha \cdot (x * y) = \alpha \cdot x * \alpha \cdot y$
5.  $\forall x \in E \quad 1 \cdot x = x$

ترميز : سنرمز ل  $*$  ب  $+$  و لكل عنصر  $x$  من  $E$  بالرمز  $\vec{x}$  ونسميه متجه

$(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي إذا وفقط إذا كان :

1. زمرة تبادلية  $(E, +)$
2.  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{x} \in E \quad (\alpha + \beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{x}$
3.  $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, \forall \vec{x} \in E \quad (\alpha\beta) \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (\beta \cdot \vec{x})$
4.  $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2 \quad \alpha \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \alpha \cdot \vec{x} + \alpha \cdot \vec{y}$
5.  $\forall \vec{x} \in E \quad 1 \cdot \vec{x} = \vec{x}$

### قواعد الحساب في فضاء متجهي

ليكن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي

$$\begin{aligned}
 1. \quad & \vec{a} + \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow \vec{x} = \vec{b} - \vec{a} \\
 2. \quad & (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \vec{x} \in E) \quad \alpha \vec{x} = \vec{0} \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ أو } \vec{x} = \vec{0} \\
 3. \quad & (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \vec{x} \in E) \quad (-\alpha)\vec{x} = \alpha(-\vec{x}) = -(\alpha\vec{x}) \\
 4. \quad & (\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2) \quad \alpha(\vec{x} - \vec{y}) = \alpha\vec{x} - \alpha\vec{y} \\
 5. \quad & (\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)(\forall \vec{x} \in E^2) \quad (\alpha - \beta)\vec{x} = \alpha\vec{x} - \beta\vec{x}
 \end{aligned}$$

### الفضاء المتجهي الجزئي

ليكن  $(E, +, \cdot)$  فضاء متجهي حقيقي و  $F$  جزء غير فارغ من  $E$

نقول أن  $F$  فضاء متجهي جزئي من الفضاء  $E$  إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{aligned}
 1. \quad & (\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2) \quad \vec{x} + \vec{y} \in F \quad F \text{ مستقر بالنسبة للقانون الداخلي} + \\
 2. \quad & (\forall \vec{x} \in F)(\forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad \lambda \vec{x} \in F \quad F \text{ مستقر بالنسبة للقانون الداخلي} \cdot
 \end{aligned}$$

### الخاصية المميزة لفضاء متجهي جزئي

$F$  فضاء متجهي جزئي من الفضاء  $E$  إذا وفقط إذا كان :

$$(\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in F^2)(\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2) \quad \alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \in F$$

### التأليفات الخطية

لتكن  $\vec{x}_1$  و  $\vec{x}_2$  و ..... و  $\vec{x}_n$  متجهات من الفضاء المتجهي  $E$  و  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  و ..... و  $\alpha_n$  أعداد حقيقية

المتجهة  $\vec{x} = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \vec{x}_i$  تسمى تأليفة خطية للمتجهات  $\vec{x}_1$  و  $\vec{x}_2$  و ..... و  $\vec{x}_n$  ذات المعاملات  $\alpha_1$  و  $\alpha_2$  و ..... و  $\alpha_n$

### أسرة مولدة


$$\forall \vec{x} \in E, \exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n / \vec{x} = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \vec{x}_i \Leftrightarrow B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \text{ الأسرة مولدة للفضاء } E$$

### أسرة حرة

$$\begin{aligned}
 & \Leftrightarrow \text{الأسرة } B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n) \text{ حرة} \\
 & \forall (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \vec{x}_i = \vec{0} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0
 \end{aligned}$$

أساس فضاء متجهي حقيقي

$\forall \vec{x} \in E, \exists! (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n / \vec{x} = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \vec{x}_i \Leftrightarrow E$  أساس للفضاء  $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  الأسرة

الأسرة  $B = (\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$  أساس للفضاء  $E \Leftrightarrow B$  أسرة حرة و مولدة للفضاء المتجهي  $E$    
عدد متجهات الأساس  $B$  يسمى بعد الفضاء المتجهي  $E$  و نرسم له ب  $\dim E = \text{card} B$  