

الأعداد العقدية

1. تقديم و تعاريف :

- ❖ توجد مجموعة يرمز لها بـ \mathbb{C} و تسمى مجموعة الأعداد العقدية و تتحقق $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ و هي تحتوي على عدد نرمز له بـ i حيث $i^2 = -1$
- ❖ كل عدد z من \mathbb{C} يكتب على شكل $z = a + ib$ مع $(a, b) \in \mathbb{R}^2$
- ❖ العدد a يسمى الجزء الحقيقي و نرمز له بـ $\operatorname{Re}(z)$
- ❖ العدد b يسمى الجزء التخييلي و نرمز له بـ $\operatorname{Im}(z)$
- ❖ الكتابة $z = a + ib$ مع $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي
- ❖ إذا كان $b \in \mathbb{R}$ حيث $z = ib$ نقول أن z تخييلي صرف و نكتب $z \in i\mathbb{R}$

2. خصائص :

ليكن $(z, z') \in \mathbb{C}^2$ لدينا :

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(z) = 0 \quad \bullet$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \operatorname{Re}(z) = 0 \quad \bullet$$

$$z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(z') \\ \operatorname{Im}(z) = \operatorname{Im}(z') \end{cases} \quad \bullet$$

$$z = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Re}(z) = 0 \\ \operatorname{Im}(z) = 0 \end{cases} \quad \bullet$$

العمليات في \mathbb{C}

ليكن $z' = a' + ib'$ و $z = a + ib$

$$z + z' = (a + a') + i(b + b') \quad \bullet$$

$$z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b) \quad \bullet$$

$$-z = -a - ib \quad \bullet$$

$$\frac{1}{z} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} \quad \bullet$$

جميع خصائص الجداء و الجمع في \mathbb{R} تبقى صالحة في \mathbb{C}

$$(a + ib)^2 = a^2 - b^2 + 2abi \quad \bullet$$

$$(a - ib)^2 = a^2 - b^2 - 2abi \quad \bullet$$

$$(a - ib)(a + ib) = a^2 + b^2 \quad \bullet$$

3. مراافق عدد عقدي

تعريف:

مراافق العدد العقدي $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ هو العدد العقدي $z = a + ib$

خصائص المراافق

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2} \quad \checkmark$$

$$\overline{z_1 \times z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2} \quad \checkmark$$

$$(z_1 \neq 0) \frac{\overline{1}}{z_1} = \frac{1}{\overline{z_1}} \quad \checkmark$$

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} \quad \checkmark$$

$$z \in \mathbb{C} \text{ و } n \in \mathbb{Z} \text{ حيث } \overline{z^n} = \overline{z}^n \quad \checkmark$$

نتائج:

$$z + \overline{z} = 2 \operatorname{Re}(z) \quad \bullet$$

$$z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im}(z) \quad \bullet$$

$$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z} \quad \bullet$$

$$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow z = -\overline{z} \quad \bullet$$

4. معيار عدد عقدي:

معيار العدد العقدي $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ مع $z = a + ib$ هو العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له بـ $|z|$ و هو معرف بما يلي :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

خصائص:

ليكن z و z' عددين عقديين

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} \quad \checkmark$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'| \quad \checkmark$$

$$(z \neq 0) \left| \frac{1}{z} \right| = \frac{1}{|z|} \quad \checkmark$$

$$(z \neq 0) \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \checkmark$$

$$n \in \mathbb{Z} \text{ حيث } |z^n| = |z|^n \quad \checkmark$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \checkmark$$

5. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

أ. عمدة عدد عقدي غير منعدم :

ليكن $z = x + iy$ من \mathbb{C}^* حيث x و y من \mathbb{R}

$(k \in \mathbb{Z}) \arg(z) = \theta + 2k\pi$ يسمى عمدة ل z و نكتب : $\begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} \end{cases}$ كل عدد حقيقي θ بحيث $(k \in \mathbb{Z}) \arg(z) \equiv \theta [2\pi]$ أو

ب. خصائص العمدة :

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين

$$\arg(\overline{z_1}) \equiv -\arg(z_1) [2\pi] \quad \checkmark$$

$$\arg(z_1 \times z_2) \equiv \arg(z_1) + \arg(z_2) [2\pi] \quad \checkmark$$

$$\arg\left(\frac{1}{z_1}\right) \equiv -\arg(z_1) [2\pi] \quad \checkmark$$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg(z_1) - \arg(z_2) [2\pi] \quad \checkmark$$

$$n \in \mathbb{Z} \text{ حيث } \arg(z_1^n) \equiv n \arg(z_1) [2\pi] \quad \checkmark$$

6. الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف:

كل عدد عقدي z غير منعدم يكتب على شكل

$$\arg(z) \equiv \theta [2\pi] \text{ و } |z| = r$$

خصائص الشكل المثلثي:

$$\overline{r(\cos(\theta)+i \sin(\theta))} = r(\cos(-\theta)+i \sin(-\theta)) \quad \bullet$$

$$r(\cos\theta+i \sin\theta) \times r'(\cos\theta'+i \sin\theta') = rr'(\cos(\theta+\theta')+i \sin(\theta+\theta')) \quad \bullet$$

$$\frac{1}{r(\cos\theta+i \sin\theta)} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta)+i \sin(-\theta)) \quad \bullet$$

$$\frac{r(\cos\theta+i \sin\theta)}{r'(\cos\theta'+i \sin\theta')} = \frac{r}{r'}(\cos(\theta-\theta')+i \sin(\theta-\theta')) \quad \bullet$$

$$(r(\cos\theta+i \sin\theta))^n = r^n(\cos(n\theta)+i \sin(n\theta)) \quad \bullet$$

7. تأويلات هندسية للأعداد العقدية:

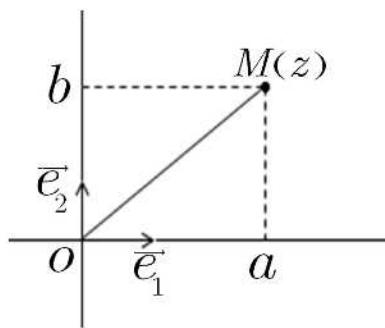
تعريف:

في المستوى (P) المنسوب إلى معلم متعمد منظم

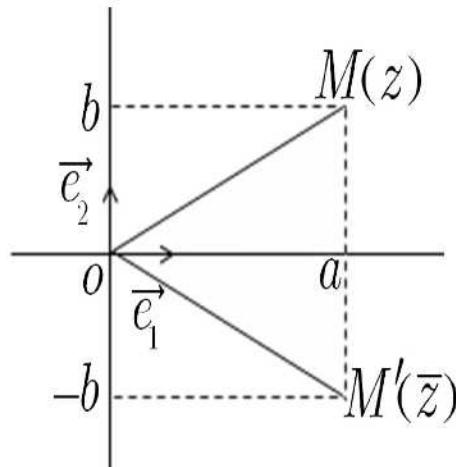
لتكن النقطة $M(a,b)$

العدد العقدي $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $z = a+ib$ يسمى لحق النقطة M \bullet

النقطة $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ تسمى صورة العدد $z = a+ib$ حيث $M(a,b) \in \mathbb{R}^2$ \bullet

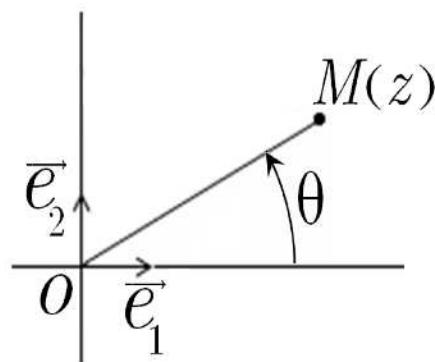


• مراافق $\bar{z} = a - ib$ هو $z = a + ib$

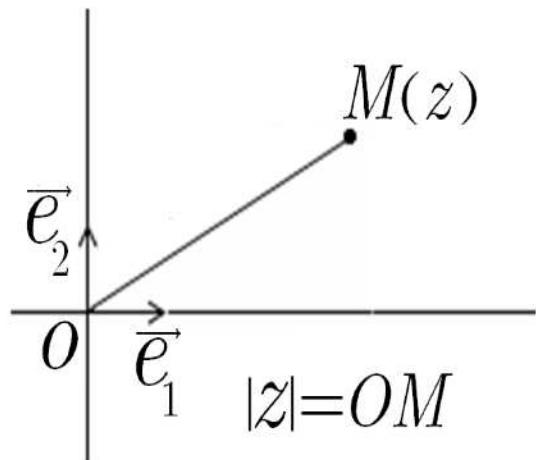


- لدينا كذلك $\overline{U}(a,b)$ هو لحق المتجهة $z = a + ib$
- المستوى (P) يسمى المستوى العقدي
- يسمى المحور الحقيقي (O, \vec{e}_1)
- يسمى المحور التخيلي (O, \vec{e}_2)
- $aff(M) = a + ib$ أو $z_M = a + ib$ و نكتب $\overline{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2$

❖ ليكن $z = a + ib$ لحق النقطة M من المستوى العقدي لدينا :



$$OM = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| : OM \text{ المسافة} \diamond$$



المسافة : AB

لتكن A و B نقطتان لحقاهما على التوالي z_B و z_A

لدينا : $AB = |z_B - z_A|$

خاصيات :

لتكن A و B نقطتان لحقاهما على التوالي z_B و z_A

و \bar{u} و \bar{v} متجهتان من المستوى العقدي (P) :

- لـ \overline{AB} هو $z_B - z_A$

- لـ $\overline{u+v}$ هو $z_{\bar{u}} + z_{\bar{v}}$

- لـ \overline{I} منتصف القطعة $[AB]$ هو $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$

- $\bar{u} = \bar{v} \Leftrightarrow z_{\bar{u}} = z_{\bar{v}}$

- نقطة لدينا M

$$\overline{OM} = \overline{OA} + \overline{OB} \Leftrightarrow z_M = z_A + z_B$$

$$\overline{OM} = \alpha \overline{OA} \Leftrightarrow z_M = \alpha z_A$$

• لـ $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$ نقط مختلفة متمتتى

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow C \text{ و } B \text{ و } A \text{ مـستقيمة}$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) \parallel (DC)$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (AB) \perp (DC)$$

$$\arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[\pi] \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_D - z_A}{z_B - z_A} \times \frac{z_B - z_C}{z_D - z_C} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow D \text{ و } C \text{ و } B \text{ و } A \text{ مـتـاـورـة}$$

قياس الزوايا :

لـ $A(z_A)$ و $B(z_B)$ و $C(z_C)$ و $D(z_D)$

$$O \neq A \text{ حيث } (\overline{e_1}, \overline{OA}) \equiv \arg(z_A)[2\pi]$$

$$A \neq B \text{ حيث } (\overline{e_1}, \overline{AB}) \equiv \arg(z_B - z_A)[2\pi]$$

$$A \neq C \text{ و } A \neq B \text{ حيث } (\overline{AB}, \overline{AC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

$$(\overline{AB}, \overline{DC}) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_D}{z_B - z_A}\right)[2\pi]$$

حيث $C \neq D$ و $A \neq B$

8. الشكل الأسني لعدد عقدي:

تعريف:

كل عدد عقدي غير منعدم يكتب على شكله الأسني بـ: $z = re^{i\theta}$
 $\arg(z) \equiv \theta [2\pi]$ و $|z| = r$ حيث

خصائص:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos \theta + i \sin \theta & \checkmark \\ \overline{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta} & \checkmark \\ \frac{1}{e^{i\theta}} &= e^{-i\theta} & \checkmark \\ e^{i\theta} \times e^{i\theta'} &= e^{i(\theta+\theta')} & \checkmark \\ \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} &= e^{i(\theta-\theta')} & \checkmark \\ (e^{i\theta})^n &= e^{in\theta} & \checkmark \end{aligned}$$

صيغ أولية

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta &= \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

9. الجذور التوانية لعدد عقدي غير منعدم

ليكن Z من C و n من N^* $\{1\}$ ❖

نسمي الجذر النوني للعدد Z أو الجذر من الرتبة n للعدد Z كل عدد عقدي z يتحقق $z^n = Z$ ليكن $r e^{i\theta}$ $(r > 0)$ $Z = r e^{i\theta}$

العدد Z يقبل n جذر نوني و هذه الجذور النونية تكتب على شكل : $z_k = \sqrt[n]{r} e^{i\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)}$ حيث $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

❖ صور الجذور النونية للعدد Z تكون مقلعاً منتظماً ذو n ضلع محاطاً بدائرة التي مرکزها O وشعاعها \sqrt{r}

❖ الجذور التوانية للعدد 1 هي الأعداد : $w_k = \sqrt[n]{r} e^{\left(\frac{2k\pi i}{n}\right)}$ و تسمى الجذور من الرتبة n للوحدة

- ❖ ليكن Z من \mathbb{C}^* و a أحد الجذور التوينة للعدد Z
نحصل على الجذور التوينة للعدد Z بضرب a في الجذور التوينة للوحدة

10. الجذور المربيعة لعدد عقدي غير منعدم

أ. الطريقة المثلثية :

الخط افقي $Z = re^{i\theta}$ لهما:

بـ. الطريقة الجبرية :

(2) إذا كان $Z \in \mathbb{R}^*$: $-i\sqrt{-Z}$ و $i\sqrt{-Z}$ هما الجذران المربعان للعدد

$$Z = -(1+i)\sqrt{\frac{b}{2}} \quad \text{و} \quad (1+i)\sqrt{\frac{b}{2}} : Z = ib \quad (b \in \mathbb{R}_+^*) \quad Z \in i\mathbb{R}_+^* \quad \underline{\text{إذا كان}} \quad (3)$$

إذا كان $Z \in i\mathbb{R}_+$ فإن $Z = ib$ $\left(b \in \mathbb{R}_+\right)$ و $\sqrt{Z} = \sqrt{ib}$ أيضاً $= \sqrt{b}\sqrt{i}$

$$:(b \neq 0 \text{ و } a \neq 0) \quad Z = a + ib \quad \underline{\text{إذا كان}} \quad (5)$$

إذا كان $b > 0$

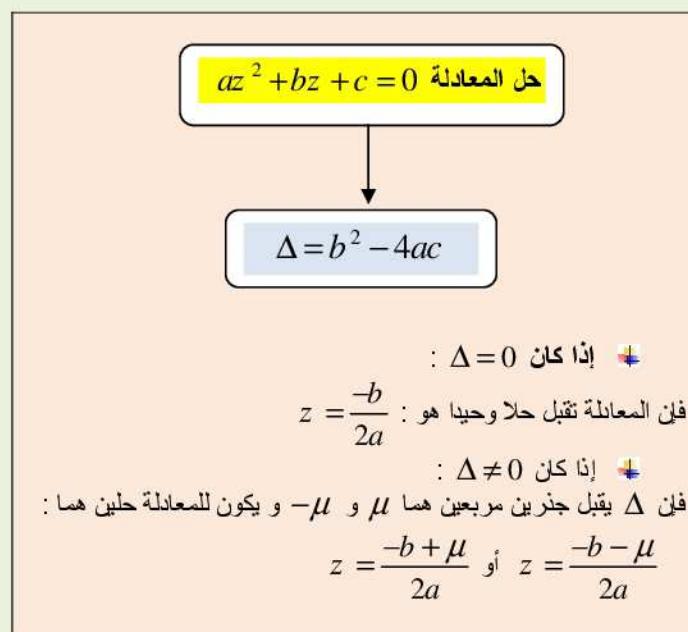
$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} + i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} \\ & -\sqrt{\frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} - i\sqrt{\frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2 + b^2}\right)} \quad \text{و} \\ & \text{هما الجذران المربعان للعدد } Z \end{aligned}$$

إذا كان $b < 0$:

$$\begin{aligned} & \sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} - i\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \\ & -\sqrt{\frac{1}{2}(a + \sqrt{a^2 + b^2})} + i\sqrt{\frac{1}{2}(-a + \sqrt{a^2 + b^2})} \quad \text{و} \\ & \text{هما الجذران المربعان للعدد } Z \end{aligned}$$

11. المعادلات من الدرجة الثانية :

نعتبر المعادلة $(a \neq 0) \quad az^2 + bz + c = 0$



ملاحظة : إذا كان z_1 و z_2 هما حلّي المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ فإن :

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = \frac{-b}{a} \\ z_1 \times z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

12. التحويلات الإعتيادية:

نعتبر تحويلات في المستوى يربط كل نقطة $M'(z)$ بالنقطة $M(z)$

❖ الكتابة العقدية للإزاحة ذات المتجهة \bar{u} هي : $z' = z + z_{\bar{u}}$

❖ الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ ونسبة k هي : $z' - \omega = k(z - \omega)$

❖ الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ هي : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$

نعتبر التطبيق : $f : \begin{matrix} P & \mapsto & P \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{matrix}$

إذا كان $a = 1$ ➤

فإن f إزاحة متجهتها \bar{u} ذات اللحق b

إذا كان $a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$ ➤

فإن f تحاكي مركزه Ω لحقه $\frac{b}{1-a}$ ونسبة a

($z = az + b$) هي النقطة الصلدة بالتحويل f أي $\Omega = f(\Omega)$ ويتم تحديد لحقها بحل المعادلة

إذا كان $|a| = 1$ حيث $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$ ➤

فإن f دوران مركزه Ω لحقه $\frac{b}{1-a}$ وزاويته $\arg(a)$

($z = az + b$) هي النقطة الصامدة بالتحويل f أي $\Omega = f(\Omega)$ ويتم تحديد لحقها بحل المعادلة

► إذا كان $|a| \neq 1$ حيث $a \in \mathbb{C}^* - \{1\}$

فإن $f = h \circ r$

حيث : h هو التحاكى الذي مركزه Ω لحقه $\frac{b}{1-a}$ و نسبته

$\arg(a)$ و زاويته $\frac{b}{1-a}$ و r هو الدوران مركزه Ω لحقه

ملاحظات :

- إذا كان r دوران مركزه Ω و زاويته θ فإن r^{-1} هو الدوران العكسي للدوران r له نفس المركز و زاويته $-\theta$
- التحاكى الذي نسبته $1 -$ هو تمايل مركزى