اتصال دالة عددية

1) اتصال دالة في نقطة :

أ. تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0

نقول أن f متصلة في x_0 إذا كان $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

f متصلة في x_0 تعني $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha \in \mathbb{R})(\forall x \in D_f): 0 < |x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

- ✓ f متصلة في a على اليمين $\Leftrightarrow$ $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$
- ✓ f متصلة في a على اليسار $\Leftrightarrow$ $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$
- ✓ f متصلة في a $\Leftrightarrow$ $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

ب. التمديد بالتصال في نقطة :

لتكن f دالة عددية بحيث $x_0 \notin D_f$ و $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ $(l \in \mathbb{R})$

الدالة $\tilde{f}$ بحيث : $\begin{cases} \tilde{f}(x) = f(x) & x \neq x_0 \\ \tilde{f}(x_0) = l \end{cases}$ متصلة في x_0

الدالة $\tilde{f}$ تسمى التمديد بالتصال للدالة f في x_0

2) الاتصال على مجال :

أ. تعاريف :

- ➢ f متصلة على مجال $]a,b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$
- ➢ f متصلة على مجال $[a,b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b

- f متصلة على مجال $]a,b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يمين a
- f متصلة على مجال $[a,b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يسار b

ب. العمليات على الدوال المتصلة :

- الدوال الحدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- الدوال الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- الدوال المثلثية $\sin$ و $\cos$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- دالة $\tan$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- دالة الجزء الصحيح متصلة على كل مجال $[n,n+1[$ $(n\in\mathbb{Z})$
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I فإن $f+g$ و $g\times f$ و $f\times g$ متصلتان على I
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I و $g\neq 0$ على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان على I .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و $f\geq 0$ على I فإن $\sqrt{f}$ متصة على I .

خاصية :

1. إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على J بحيث $f(I)\subset J$ فإن $g\circ f$ متصلة على I
2. إذا كانت $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ و g متصلة في l فإن $\lim_{x\to x_0} g\circ f(x)=g(l)$

3) صورة مجال بدالة متصلة:

خاصية :

- صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة
- صورة مجال بدالة متصلة هو مجال

4) صورة مجال بدالة متصلة و رتيبة قطعا :

$f(I)$	المجال I	
$\left[f(a),f(b)\right]$	$\left[a,b\right]$	f تزايدية قطعا
$\left[f(a),\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\right[$	$\left[a,b\right[$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x),f(b)\right]$	$\left]a,b\right]$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x),\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x)\right[$	$\left]a,b\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),f(a)\right]$	$\left]-\infty,a\right]$	
$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)\right[$	$\left]-\infty,a\right[$	
$\left[f(b),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left[b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x),\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$\left]-\infty,+\infty\right[$	
$\left[f(b),f(a)\right]$	$\left[a,b\right]$	f تناقصية قطعا
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x),f(a)\right]$	$\left[a,b\right[$	
$\left[f(b),\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\right[$	$\left]a,b\right]$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x),\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\right[$	$\left]a,b\right[$	
$\left[f(a),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$	$\left]-\infty,a\right]$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$	$\left]-\infty,a\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),f(b)\right]$	$\left[b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x)\right[$	$\left]b,+\infty\right[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x),\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$	$\left]-\infty,+\infty\right[$	

5) مبرهنة القيم الوسيطية :

إذا كانت f متصلة على $[a;b]$ فإنه لكل λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل c من $[a;b]$ بحيث : $f(c)=\lambda$

نتائج :

- مبرهنة القيم الوسيطية (وجودية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a,b[$

- مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a,b[$

- مبرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على I و $0\in f(I)$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

6) الدالة العكسية :

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال $J=f(I)$ نحو I
أو نقول أن f تقابل من I نحو J وتقابله العكسي f^{-1}

نتائج:

$$(1)\quad \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} f^{-1}\circ f(x)=x & ;x\in I \\ f\circ f^{-1}(x)=x & ;x\in J \end{cases}$$

خاصيات:

لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :

- f^{-1} متصلة على المجال J
- f و f^{-1} لهما نفس الرتابة
- منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y = x$ (المنصف الأول للمعلم)