

الهندسة الفضائية

(1) تذكير:

في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

❖ لنكن $A(x_A, y_A, z_A)$ و $B(x_B, y_B, z_B)$

إحداثيات المتجهة \overline{AB} : $\overline{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

المسافة AB : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

إحداثيات I منتصف القطعة $[AB]$: $I\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$

❖ لنكن $\vec{u}(x, y, z)$ و $\vec{v}(x', y', z')$

منظم متجهة: $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ و $\|\vec{v}\| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}$

الجداء السلمي: $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

خاصية: $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

❖ تمثيل بارامترى لمستقيم:

ليكن (D) المستقيم المار من النقطة $A(x_A, y_A, z_A)$ و موجه بالمتجهة $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$

$\overline{AM} \Leftrightarrow M(x, y, z) \in (D)$ و \vec{u} مستقيمان

$(t \in \mathbb{R}) \quad \overline{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow$

$$(t \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} x = x_A + t\alpha \\ y = y_A + t\beta \\ z = z_A + t\gamma \end{cases} \Leftrightarrow$$

النظمة الأخيرة تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم (D)

❖ معادلة ديكارتية لمستوى:

ليكن (P) المستوى المار من النقطة A و المتجهة $\vec{n}(a, b, c)$ منظمية للمستوى (P)

$M(x, y, z) \in (P) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$\Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$

خاصية:

إذا كان (P) مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ فإن $\vec{n}(a, b, c)$ هي متجهة منظمية للمستوى (P) .

❖ مسافة نقطة عن مستوى :

ليكن (P) مستوى معادلته $ax + by + cz + d = 0$ و $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ نقطة من الفضاء

$$d(\Omega, (P)) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + cz_\Omega + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

(2) الفلكة

أ. تعريف :

لتكن Ω نقطة و r عددا حقيقيا موجبا قطعاً
مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M = r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω و شعاعها r و نرمز لها بالرمز : $S(\Omega, r)$

ب. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركزها و شعاعها :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a, b, c)$ و شعاعها r هي :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2$$

ج. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن (S) فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و M نقطة من الفضاء

$$M \in (S) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{BM} = 0$$

د. دراسة E مجموعة النقط التي تحقق: $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

$$\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4}$$

تكافئ $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

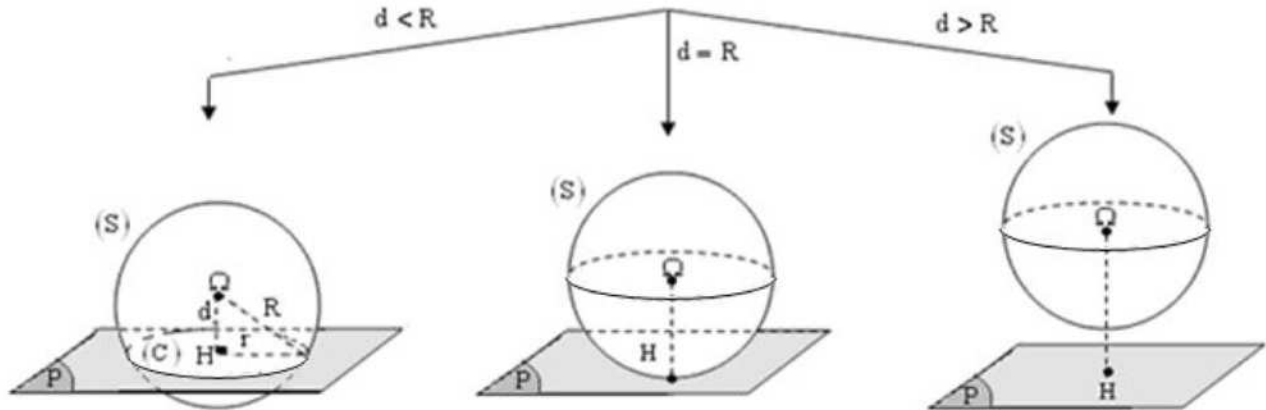
هناك ثلاث حالات :

- E مجموعة فارغة : $\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} < 0$
- E هي النقطة الأحادية $\left\{ \Omega \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2} \right) \right\}$: $\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} = 0$
- E هي الفلكة التي مركزها $\Omega \left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2} \right)$ وشعاعها $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}}{2}$: $\frac{a^2 + b^2 + c^2 - 4d}{4} > 0$

3) الأوضاع النسبية لفلكة و مستوى

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d = d(\Omega, (P))$

لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P)



المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة (C) مركزها H و شعاعها

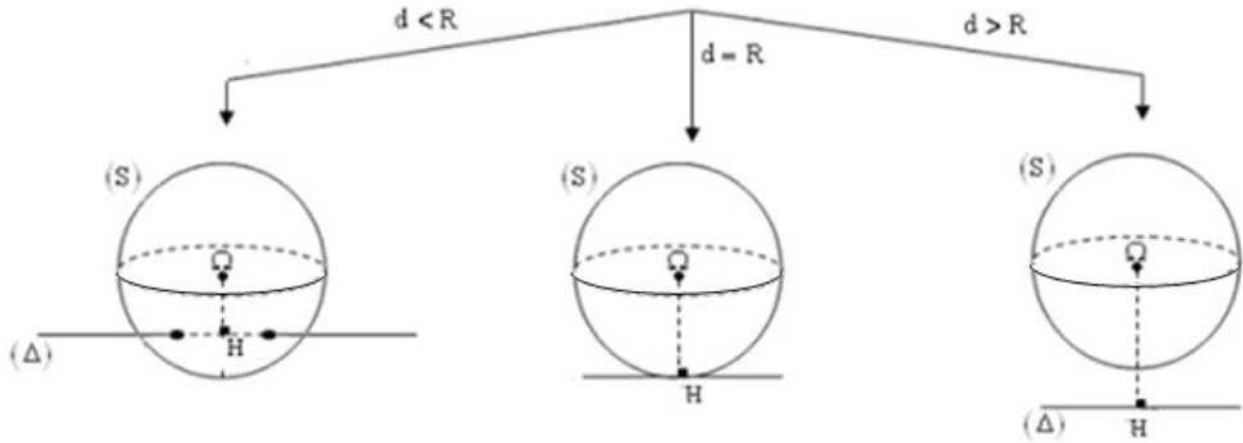
$$r = \sqrt{R^2 - d^2}$$

المستوى (P) مماس للفلكة (S) في النقطة H

المستوى (P) لا يقطع الفلكة (S)

(4) الأوضاع النسبية لفلكة و مستقيم :

لتكن (S) فلكة مركزها Ω و شعاعها R . نضع $d = d(\Omega, (\Delta))$
لتكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (Δ)



المستقيم (Δ) يخترق الفلكة (S) في نقطتين مختلفتين	المستقيم (Δ) مماس للفلكة (S) في النقطة H	المستقيم (Δ) و الفلكة (S) لا يتقاطعان
---	---	--

(5) الجداء المتجهي :

أ. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي :

$$\text{إذا كان } \vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ و } \vec{u} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \text{ فإن}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

ب. استقامية متجهتين :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \text{ يكافئ } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان}$$

ج. استقامة ثلاث نقط :

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \vec{0} \text{ و } B \text{ و } C \text{ مستقيمة يكافئ}$$

د. معادلة ديكارتية لمستوى :

إذا كان $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \neq \vec{0}$ فإن النقط A و B و C غير مستقيمة وبالتالي فهي تحدد لنا مستوى (ABC) و المتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ هي متجهة منظمية للمستوى (ABC) و لدينا : $M \in (ABC) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0$ و منه نستنتج معادلة المستوى (ABC) و ملاحظة : كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجها بالمتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$

ه. مساحة مثلث - مساحة متوازي أضلاع:

$$S_{ABC} = \frac{\|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\|}{2} \text{ : مساحة مثلث } ABC \text{ هي}$$

$$S_{ABCD} = \|\overline{AB} \wedge \overline{AC}\| \text{ : مساحة متوازي الأضلاع هي}$$

و. مسافة نقطة عن مستقيم :

$$d(\Omega, (D)) = \frac{\|\overline{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ : مسافة نقطة } \Omega \text{ عن مستقيم } (D) \text{ مار من نقطة } A \text{ و موجّه بمتجهة } \vec{u} \text{ هي}$$

ز. توازي و تعامد مستويين :

نعتبر مستويين $(P): ax + by + cz + d = 0$ و $(P'): a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$\vec{n}(a, b, c)$ و $\vec{n}'(a', b', c')$ هما متجهتان منظمتان للمستويان (P) و (P')

$(P) \parallel (P')$ يكافئ $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$

$(P) \perp (P')$ يكافئ $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$

ك. تقاطع مستويين :

إذا كان (P) و (P') متقاطعان فإن تقاطعهما هو مستقيم موجه بالمتجهة $\vec{n} \wedge \vec{n}'$