2 ع ت — الأعداد العقدية

1.مجموعة الأعداد العقدية :

توجد مجموعة يرمز لها بالرمز **C** و تحقق :

. $R \subset C$

.العمليات الجبرية في **C** هي امتداد للعمليات في **R** .

.تحتوي على عدد غير حقيقي يكتب **i** ويحقق $i^2=-1$.

.كل عنصر **z** من **C** يكتب بكيفية وحيدة على شكل:

a+ib حيث **a** و **b** من **R** .

مصطلحات :

. كل عنصر من **C** يسمى عدد عقدي

.المجموعة **C** تسمى مجموعة الأعداد العقدية .

.الكتابة **z=a+ib** تسمى الشكل الجبري للعدد العقدي **z** .

.العدد الحقيقي **a** يسمى الجزء الحقيقي للعدد **z** ورمزه $a = \mathrm{Re}(z)$.

.العدد الحقيقي **b** يسمى الجزء التخيلي للعدد **z** ورمزه $b = \mathrm{Im}(z)$.

خاصية : (الشكل الجبري والعمليات في مجموعة الأعداد العقدية :

ليكن **a** و **b** و **c** و **d** أعداد حقيقية .

. $a+ib=0 \Leftrightarrow a=b=0$

. $a+ib=c+id \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b=d \end{cases}$

. $(a+ib)+(c+id)=(a+c)+i(b+d)$

. $(a+ib)\times(c+id)=(ac-bd)+i(ad+bc)$

2.التمثيل الهندسي لعدد عقدي :

المستوى المزود بمعلم م م م $(O,\vec{e}_1,\vec{e}_2)$ يسمى المستوى العقدي

تعريف : (اللحق و الصورة)

.نعتبر عددا عقديا $z=a+ib$ حيث $(a,b)\in R^2$.

. النقطة $M(a,b)$ تسمى صورة العدد **z** و نرمز لها بالرمز $M(z)$.

. العدد العقدي $z=a+ib$ يسمى لحق $M(a,b)$ ويكتب z_M .

. المتجهة $\vec{u}=a\vec{e}_1+b\vec{e}_2$ تسمى المتجهة الصورة للعدد **z** ونرمز لها بالرمز $\vec{u}(z)$.

. العدد العقدي $z=a+ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$ ونرمز له ب $z_{\vec{u}}$.

خاصية : (اللحق و العمليات)

. لحق نقطة **M** هو لحق المتجهة $\overrightarrow{OM}$

. $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

. $z_{\vec{u}+\vec{v}} = z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}}$

. $z_{\vec{u}} = z_{\vec{v}} \Leftrightarrow \vec{u}=\vec{v}$

لحق المتجهة $\alpha\vec{u}$ هو $\alpha z_{\vec{u}}$

تعريف : (المرافق)

ليكن $z=x+iy$ عددا عقديا حيث x و y عددان حقيقيان .

العدد العقدي $x-iy$ يسمى مرافق العدد العقدي **z** ويرمز له بالرمز $\overline{z}$

خاصية : (المرافق والعمليات)

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين .

. $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$

. $\overline{z_1 z_2}=\overline{z_1}\,\overline{z_2}$

. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$ $(z_2 \neq 0)$

. $\overline{z^n}=(\overline{z})^n$ حيث $n\in Z$ و $z\in C^*$

تعريف : (المعيار)

ليكن **z=a+ib** عددا عقديا مع $(a,b)\in R^2$

العدد الحقيقي $\sqrt{a^2+b^2}$ يسمى معيار العدد **z** ونرمز له بالرمز $|z|$

ملاحظة :

. ليكن **z** عدد اعقديا و **M** صورته في المستوى العقدي : لدينا $OM=|z|$

. لتكن **A** و **B** نقطتين الحاقها على التوالي z_A و z_B لدينا: $AB=|z_B-z_A|$

. $|z|=\sqrt{z\overline{z}}$

خاصية : (المعيار و العمليات)

. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$ حيث $z_2\neq 0$ ، $|z_1\times z_2|=|z_1|\times|z_2|$

. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

. $|z^n|=|z|^n$ حيث $n\in Z$ و $z\in C^*$

تعريف : (العمدة)

ليكن **z** عددا عقديا غير منعدم و **M** صورته $(O\neq M)$

المتجهتان $\vec{e}_1$ و $\overrightarrow{OM}$ الغير منعدمتين تحددان زاوية موجهة

$(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM})$ كل قياس للزاوية $(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM})$ نسميه عمدة العدد **z** ونرمز له ب $\arg(z)$

ولدينا $\arg(z)\equiv(\vec{e}_1,\overrightarrow{OM})\ [2\pi]$

خاصية : (العمدة و العمليات)

ليكن z_1 و z_2 عددين عقديين غير منعدمين

. $\arg(\overline{z_1})\equiv-\arg(z_1)\ [2\pi]$

. $\arg(z_1z_2)\equiv\arg(z_1)+\arg(z_2)\ [2\pi]$

. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right)\equiv\arg(z_1)-\arg(z_2)\ [2\pi]$

. $\arg(z^n)\equiv n\arg(z)\ [2\pi]$ حيث $n\in Z$ و $z\in C^*$

2 ع ت — الأعداد العقدية

خاصية: (قياس الزوايا)

لتكن A و B و C و D اربع نقط من المستوى الحاقها على التوالي :

z_A و z_B و z_C و z_D

. $(\vec{e}_1,\overrightarrow{OA})\equiv \arg(z_A)\ [2\pi]$ حيث $O\neq A$

. $(\vec{e}_1,\overrightarrow{AB})\equiv \arg(z_B-z_A)\ [2\pi]$ حيث $A\neq B$

. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})\equiv \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi]$ حيث $A\neq B$ و $A\neq C$

. $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{DC})\equiv \arg\left(\frac{z_C-z_D}{z_B-z_A}\right)\ [2\pi]$ حيث $A\neq B$ و $D\neq C$

3. الشكل المثلثي :

خاصية : (الشكل المثلثي)

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب على الشكل :

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ حيث $\arg(z)\equiv\theta\ [2\pi]$ و $|z|=r$.

نقول إننا كتبنا العدد العقدي z على الشكل المثلثي.

ترميز :

نرمز أيضا للكتابة $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ بالرمز $[r,\theta]$.

خاصية : (العلاقة بين الشكل الجبري والشكل المثلثي)

$$z=a+ib=[r,\theta] \Leftrightarrow \begin{cases} r=\sqrt{a^2+b^2}\\ \cos\theta=\frac{a}{r}\\ \sin\theta=\frac{b}{r}\end{cases}$$

خاصية : (الشكل المثلثي و العمليات)

ليكن r و r' عددين حقيقين موجبين قطعا و θ و θ' عددين حقيقين

. $\overline{[r,\theta]}=[r,-\theta]$ و $\frac{1}{[r,\theta]}=\left[\frac{1}{r},-\theta\right]$

. $[r,\theta]\times[r',\theta']=[rr',\theta+\theta']$

. $\frac{[r,\theta]}{[r',\theta']}=\left[\frac{r}{r'},\theta-\theta'\right]$

. $[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$ حيث $n\in Z$

خاصية : (صيغة موافر)

لكل n من N و θ من R لدينا :

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$$

$$[r,\theta]^n=[r^n,n\theta]$$

4. الترميز الاسي لعدد عقدي غير منعدم :

تعريف : (الرمز $e^{i\theta}$)

لكل عدد حقيقي θ نرمز بالرمز $e^{i\theta}$ للعدد العقدي $[1,\theta]=\cos\theta+i\sin\theta$

خاصية : (الترميز الاسي والعمليات)

ليكن α و θ عددين حقيقين

. $\overline{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ ، $\frac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$ ، $e^{i\theta}e^{i\alpha}=e^{i(\theta+\alpha)}$

. $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\alpha}}=e^{i(\theta-\alpha)}$ ، $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$ حيث $n\in Z$

خاصية : (الترميز الاسي لعدد عقدي)

كل عدد عقدي غير منعدم z يكتب على الشكل : $z=re^{i\theta}$ حيث

$|z|=r$ و $\arg(z)\equiv\theta\ [2\pi]$

. نقول إننا كتبنا العدد العقدي z على الشكل الاسي

تعريف : (صيغتا اولير)

لكل عدد حقيقي θ الصيغتان:

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$$

و

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

تسميان صيغتا اولير

5. المعادلات من الدرجة الثانية :

خاصية : (المعادلات من الدرجة الثانية)

S مجموعة حلول المعادلة $az^2+bz+c=0$ حيث a و b و c

أعداد حقيقية و a غير منعدم. مميز المعادلة $\Delta=b^2-4ac$

. اذا كان $\Delta\succ 0$ فان : $S=\left\{\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a},\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right\}$

. اذا كان $\Delta=0$ فان : $S=\left\{-\frac{b}{2a}\right\}$

. اذا كان $\Delta\prec 0$ فان : $S=\left\{\frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a},\frac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right\}$

خاصية : (العلاقة بين المعاملات و الجذور)

ليكن z_1 و z_2 حلي للمعادلة $az^2+bz+c=0$

حيث a و b و c أعداد حقيقية و a غير منعدم.

لدينا : $z_1+z_2=\frac{-b}{a}$

$z_1\times z_2=\frac{c}{a}$

الأعداد العقدية 2ع ت

6.تطبيقات هندسية للاعداد العقدية :

خاصية : (الاستقامية – التوازي – التعامد – التداور)

لتكن A و B و C و D نقط مختلفة مثنى مثنى .

. تكون A و B و C مستقيمية اذا وفقط اذا كان $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in R$

. $(AB)//(DC)$ يكافئ $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in R$

يكافئ $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\equiv 0\ [\pi]$

. $(AB)\perp(DC)$ يكافئ $\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\in iR$

يكافئ $\arg\left(\frac{z_D-z_C}{z_B-z_A}\right)\equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$

. النقط A و B و C و Dمتداورة يكافئ $\left(\frac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\cdot\frac{z_B-z_C}{z_D-z_C}\right)\in R$

خاصية : ...طبيعة مثلث

. ABC مثلث قائم الزاوية في A يكافئ $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\in iR$

. ABC مثلث متساوي الساقين في A يكافئ $|z_B-z_A|=|z_C-z_A|$

. ABC متساوي الساقين وقائم الزاوية في A يكافئ $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\pm i$

. ABC متساوي الأضلاع يكافئ $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}=\left[1;\pm\frac{\pi}{3}\right]$

خاصية: .... طبيعة رباعي

. ABCD متوازي الأضلاع يكافئ $z_B-z_A=z_C-z_D$

. ABCD مستطيل يكافئ ABCDمتوازي الأضلاع و $(AB)\perp(AD)$

. ABCD معين يكافئ ABCDمتوازي الأضلاع و $(AC)\perp(BD)$

. ABCDمربع يكافئ ABCD مستطيل و AB=AC

يكافئ $z_B-z_A=z_C-z_D$ و $\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}=\pm i$

خاصية: .... التحويلات الإعتيادية

نعتبر تحويلا في المستوى يربط كل نقطة $M(z)$ بالنقطة $M'(z')$.

. الكتابة العقدية للإزاحة ذات المتجهة $\vec{u}$ هي : $z'=z+z_{\vec{u}}$

. الكتابة العقدية للتحاكي الذي مركزه $\Omega(\omega)$ ونسبته k هي :

$$z'=k(z-\omega)+\omega$$

. الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه $\Omega(\omega)$ وزاويته θ هي :

$$z'=e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$$

علاقات في الحساب المثلثي:

$$\cos\theta-i\sin\theta=\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$$
$$-\cos\theta+i\sin\theta=\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)$$
$$-\cos\theta-i\sin\theta=\cos(\pi+\theta)+i\sin(\pi+\theta)$$
$$\sin\theta+i\cos\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$$

x بالراديان	$\cos x$	$\sin x$	$\tan x$
0	1	0	0
$\pi/6$	$\sqrt{3}/2$	$1/2$	$\sqrt{3}/3$
$\pi/4$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
$\pi/3$	$1/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{3}$
$\pi/2$	0	1	غير معرف
$2\pi/3$	$-1/2$	$\sqrt{3}/2$	$-\sqrt{3}$
$3\pi/4$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	-1
$5\pi/6$	$-\sqrt{3}/2$	$1/2$	$-\sqrt{3}/3$
π	-1	0	0
2π	1	0	0

$\cos(\pi+x)=-\cos x$ $\sin(\pi+x)=-\sin x$ $\tan(\pi+x)=\tan x$	$\cos(-x)=\cos x$ $\sin(-x)=-\sin x$ $\tan(-x)=-\tan x$
$\cos(x+2\pi)=\cos x$ $\sin(x+2\pi)=\sin x$ $\tan(x+2\pi)=\tan x$	$\cos(\pi-x)=-\cos x$ $\sin(\pi-x)=\sin x$ $\tan(\pi-x)=-\tan x$

$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\frac{-1}{\tan x}$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos x$ $\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\frac{1}{\tan x}$

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x$$
$$\sin 2x=2\sin x\cos x$$