2ع ت — الدوال اللوغاريتمية والأسية

1.الدالة اللوغاريتمية النبيرية :

الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0,+\infty[$ والتي تنعدم في 1 تسمى دالة اللوغاريتم النبيري , ونرمز لها ب: ln

نتائـــــــج :

* الدالة ln معرفة, متصلة و قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$.

* الدالة ln تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.

بتعبير اخر : لكل x و y من $]0,+\infty[$:
$$\ln x \prec \ln y \Leftrightarrow x \prec y$$
$$\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$$

خاصيات جبرية

لكل x و y من $]0,+\infty[$ و لكل r من Q لدينا :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad ، \quad \ln\frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$
$$\ln x^r = r\ln x \quad ، \quad \ln\frac{1}{y} = -\ln y$$

نهايـــــات هامة :

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad ، \quad \lim_{\substack{x\to 0\\ x\succ 0}} \ln x = -\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad (n \in N^*) \quad ، \quad \lim_{x\to 0^+} x^n \ln x = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad ، \quad \lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$$

مشتقة الدالة اللوغارتيمية النبيرية :

* الدالة ln قابلة للإشتقاق على $]0,+\infty[$ ولدينا :
$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

* إذا كانت u دالة قابلة للإشتقاق و غير منعدمة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln|u(x)|$ قابلة للإشتقاق على I

ولدينا : $\forall x \in I, \quad (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

نتيجة :اذا كانت u قابلة للاشتقاق و غير منعدمة على مجال I فان الدوال الاصلية للدالة $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$ على المجال I هي الدوال المعرفة على I بما يلي : $x \mapsto \ln|u(x)| + \lambda$ مع $\lambda \in R$

الدالة اللوغاريتمية للأساس a :

ليكن a عنصرا من $]0,1[\cup]1,+\infty[$. الدالة اللوغاريتمية للأساس a هي الدالة المعرفة على $]0,+\infty[$ بما $\forall x \succ 0, \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$

دالة اللوغاريتم للأساس 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و تكتب log .

2.الدالة الأسية النبيرية

التقابل العكسي لدالة اللوغاريتم النبيري ln تسمى الدالة الأسية النبيرية ونرمز لها بالرمز : **exp** .

نتائـــــــج :

* الدالة exp معرفة ، متصلة وتزايدية قطعا على R

* لكل x و y من R :
$$exp(x) \prec exp(y) \Leftrightarrow x \prec y$$
$$exp(x) = exp(y) \Leftrightarrow x = y$$

* لكل x من R : $\ln(exp(x)) = x$

* لكل x من $]0;+\infty[$: $exp(\ln x) = x$

* لكل x من R : $exp(x) \succ 0$

* $exp(0) = 1$ و $exp(1) = e$

* لكل x من R : $exp(x) = e^x$

خاصيات جبرية

لكل x و y من R لكل r من Q :

$$e^{x+y} = e^x . e^y \quad ، \quad e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$
$$e^{-x} = \frac{1}{e^x} \quad ، \quad e^{rx} = (e^x)^r$$

النهايات الاعتيادية : $(n \in N^*)$

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x^n e^x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} x e^x = 0$$
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

مشتقة الدالة $x \mapsto e^x$:

*الدالة $x \mapsto e^x$ قابلة للاشتقاق على R و $(\forall x \in R) : (e^x)' = e^x$

*اذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I من R

فان : $x \mapsto e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا
$$(\forall x \in I) : (e^{u(x)})' = u'(x).e^{u(x)}$$

نتيجة :اذا كانت u قابلة للاشتقاق على مجال I فان الدوال الاصلية للدالة $x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$ على المجال I هي الدوال المعرفة على I بما يلي : $x \mapsto e^{u(x)} + \lambda$ مع $\lambda \in R$