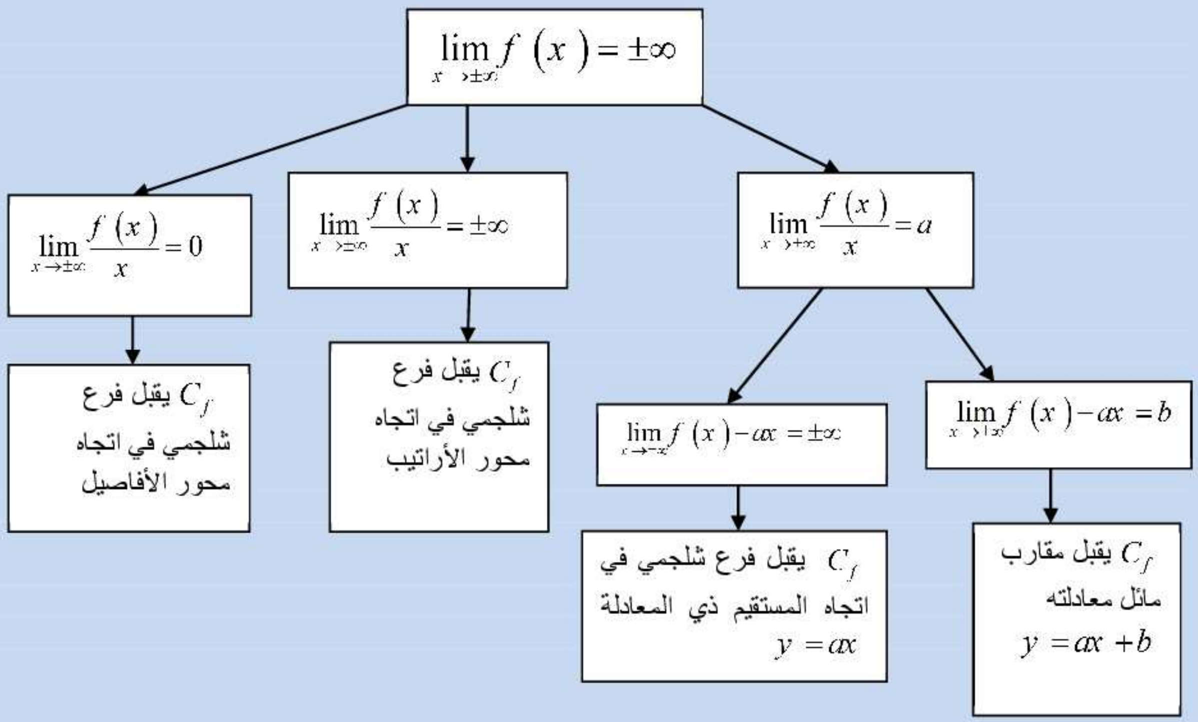
دراسة الدّوال و التمْثيل المِبياني

1. النهايات و الفروع اللانهائية:

$\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب عمودي معادلته $x=a$

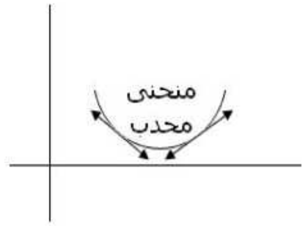
$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب أفقي معادلته $y=b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$

$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0 \Leftrightarrow$ C_f يقبل مقارب مائل معلدلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$ أو بجوار $-\infty$

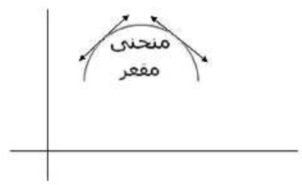


2. تقعر منحنى و نقط الانعطاف:

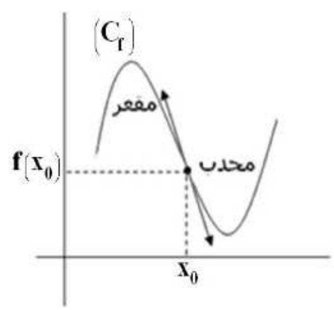
✓ إذا كان $f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$ فإن (C_f) محدب



✓ إذا كان $f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in I$ فإن (C_f) مقعر



✓ إذا كانت f'' تنعدم و تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف
✓ إذا كانت f' تنعدم و لا تغير إشارتها عند a فإن النقطة $I(a,f(a))$ هي نقطة انعطاف



3. مركز و محور تماثل (C_f) :

- المستقيم ذي المعادلة $x = a$ محور تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : \quad 2a-x \in D_f \\ \forall x \in D_f : \quad f(2a-x) = f(x) \end{cases}$

- النقطة $\Omega(a,b)$ مركز تماثل ل (C_f) $\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f : \quad 2a-x \in D_f \\ \forall x \in D_f : \quad f(2a-x) = 2b - f(x) \end{cases}$

اتصال دالة عددية

1) تذكير : النهايات

1. لكل n من $\mathbb{N}^*$ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n : pair \\ -\infty & n : impair \end{cases}$

2. نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

3. نهاية دالة جذرية هي خارج نهاية حدها الأعلى درجة في البسط على حدها الأعلى درجة في المقام

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin(ax)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{\tan(ax)}{x} = a$ و $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

5. جداول النهايات:

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f+g$	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f\times g$	$l\times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l\neq0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim\frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	l	$l>0$	$l>0$	$l<0$	$l<0$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l'\neq0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2) اتصال دالة في عدد :

تعريف 1:

f متصلة في a $\Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

تعريف 2:

- ✓ f متصلة في a على اليمين $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$
- ✓ f متصلة في a على اليسار $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$
- ✓ f متصلة في a $\Leftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$

3) الإتصال على مجال :

خاصيات :

- f متصلة على مجال $]a,b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$
- f متصلة على مجال $[a,b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b
- f متصلة على مجال $[a,b[$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يمين a
- f متصلة على مجال $]a,b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $]a,b[$ و متصلة على يسار b

4) العمليات على الدوال المتصلة

- الدوال الحدودية متصلة على $\mathbb{R}$
- الدوال الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- الدوال المثلثية $\sin$ و $\cos$ متصلتان على $\mathbb{R}$
- دالة $\tan$ متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I فإن $f+g$ و $f\times g$ متصلتان على I
- إذا كانت f و g متصلتان على مجال I و $g\neq 0$ على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان على I .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و $f\geq 0$ على I فإن $\sqrt{f}$ متصة على I .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على J بحيث $f(I)\subset J$ فإن $g\circ f$ متصلة على I

4) صورة مجال بدالة متصلة و رتيبة قطعا

	المجال I	$f(I)$
f تزايدية قطعا	$[a,b]$	$[f(a),f(b)]$
	$[a,b[$	$\left[f(a),\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}f(x)\right[$
	$]a,b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x),f(b)\right]$
	$]a,b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}}f(x),\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}}f(x)\right[$
	$]-\infty,a]$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),f(a)\right]$
	$]-\infty,a[$	$\left]\lim\limits_{x\to-\infty}f(x),\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}}f(x)\right[$
	$[b,+\infty[$	$\left[f(b),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$
	$]b,+\infty[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}}f(x),\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right[$

$\left]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right[$	$]-\infty,+\infty[$	
$[f(b),f(a)]$	$[a,b]$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x), f(a)\right]$	$[a,b[$	
$\left[f(b), \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\right[$	$]a,b]$	
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ x<b}} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)\right[$	$]a,b[$	
$\left[f(a), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$	$]-\infty,a]$	f تناقصية قطعا
$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$	$]-\infty,a[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), f(b)\right]$	$[b,+\infty[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{\substack{x\to b\\ x>b}} f(x)\right[$	$]b,+\infty[$	
$\left]\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to-\infty} f(x)\right[$	$]-\infty,+\infty[$	

5) مبرهنة القيم الوسيطية :

إذا كانت f متصلة على $[a;b]$ فإنه لكل λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل c من $[a;b]$ بحيث : $f(c)=\lambda$

نتائج :

- مبرهنة القيم الوسيطية (وجودية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $]a,b[$

- مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ و $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]a,b[$

- مبرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على I و $0\in f(I)$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

6) الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعا :

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعا على مجال I فإن f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال $J=f(I)$ نحو I

نتائج:

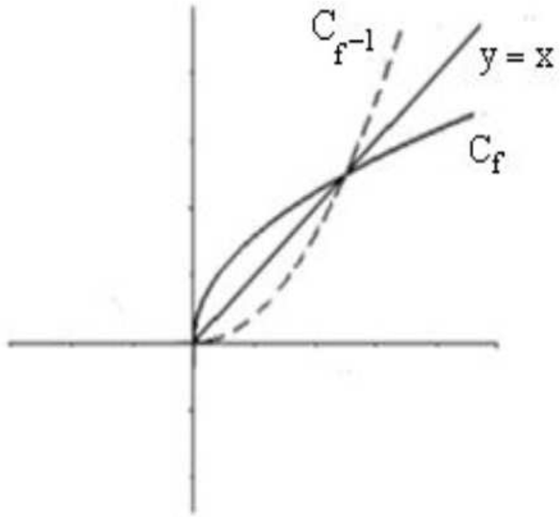
$$(1)\quad \begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ x\in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y)=x \\ y\in I \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} f^{-1}\circ f(x)=x & ;x\in I \\ f\circ f^{-1}(x)=x & ;x\in J \end{cases}$$

خاصيات:

لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :

- f^{-1} متصلة على المجال J
- f و f^{-1} لهما نفس الرتابة
- منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة للمستقيم ذي المعادلة $y=x$ (المنصف الأول للمعلم)



7) الجذر من الرتبة n _ $(n \in \mathbb{N}^*)$

أ. تعريف :

ليكن n من $\mathbb{N}^*$
الدالة العكسية للدالة $x \mapsto x^n$ على المجال $[0,+\infty[$ تسمى دالة الجذر من الرتبة n و نرمز لها ب : $x \mapsto \sqrt[n]{x}$
الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$

ب. خصائص :

ليكن x و y عددان حقيقيان موجبان. لدينا :

$$\left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x \qquad \sqrt[n]{x^n} = x \qquad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[nm]{x} \qquad \sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x}^m$$

$$\sqrt[n]{x.y} = \sqrt[n]{x}.\sqrt[n]{y} \qquad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (y \neq 0)$$

ج. خاصية:

لتكن f دالة و $n \in \mathbb{N}^*$

- إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ فإن : $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$
- إذا كان $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ و $l \geq 0$ فإن : $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$
- إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

8) القوى الجدرية لعدد حقيقي:

أ. تعريف :

ليكن n و m من $\mathbb{N}^*$ و $x > 0$ لدينا :

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$$

ب. خاصية :

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y و لكل r و r' من $\mathbb{Q}^*$:

- $x^{r+r'} = x^r x^{r'}$
- $x^r . y^r = (x . y)^r$
- $(x^r)^{r'} = x^{r.r'}$
- $\frac{1}{x^r} = x^{-r}$
- $\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$
- $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$