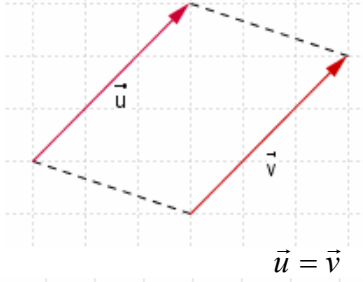


## المتجهات في الفضاء

### (I) - تساوي متجهتين - جمع المتجهات

#### 1- عناصر متجهة

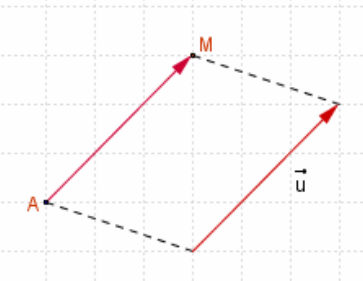
- $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين من الفضاء، إذا رمزنا للمتجهة  $\overrightarrow{AB}$  بالرمز  $\vec{u}$  فان :
- اتجاه  $\vec{u}$  هو اتجاه المستقيم  $(AB)$
  - منحى  $\vec{u}$  هو المنحى من  $A$  إلى  $B$
  - منظم  $\vec{u}$  هي المسافة  $AB$  و نكتب:  $AB = \|\vec{u}\|$
- ملحوظة:** لكل نقطة  $A$  من الفضاء المتجهة  $\overrightarrow{AA}$  ليس لها اتجاه و منظمها منعدم،  $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$  تسمى المتجهة المنعدمة و نكتب



#### 2- تساوي متجهتين

##### تعريف

تكون متجهتان متساويتان إذا كان لهما نفس الاتجاه و نفس المنحى و نفس المنظم



لكل متجهة  $\vec{u}$  من الفضاء و لكل نقطة  $A$  في الفضاء توجد نقطة وحيدة  $M$  حيث  $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$

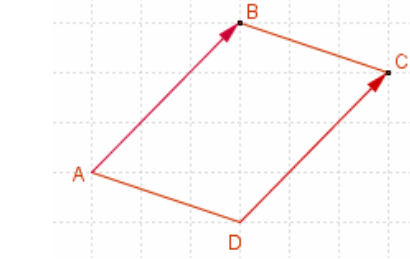
##### خاصية

$ABCD$  رباعيا في الفضاء

$ABCD$  متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

##### خاصية

لتكن  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  أربع نقط من الفضاء  
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  إذا وفقط إذا كان  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$  (تبديل الوسطين)  
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  إذا وفقط إذا كان  $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{CA}$  (تبديل الطرفين)



#### 3- مجموع متجهتين - علاقة شال

أ-  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهتان في الفضاء

لتكن  $A$  نقطة من الفضاء،

توجد نقطة وحيدة  $B$  حيث  $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$ .

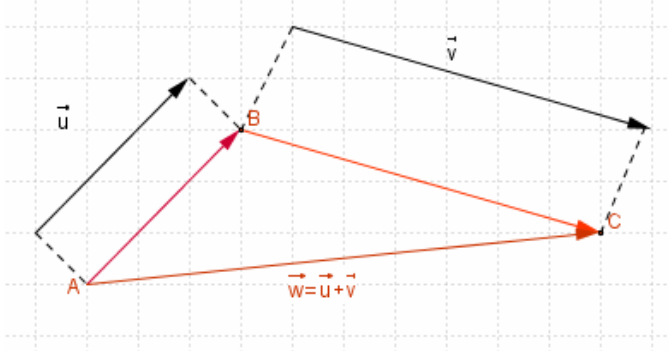
توجد نقطة وحيدة  $C$  حيث  $\overrightarrow{BC} = \vec{v}$ .

النقطتان  $A$  و  $C$  تحددان متجهة

وحيدة  $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$

المتجهة  $\vec{w}$  هي مجموع المتجهتين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$

نكتب  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$   $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$



#### ب- علاقة شال

مهما كانت النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  من الفضاء

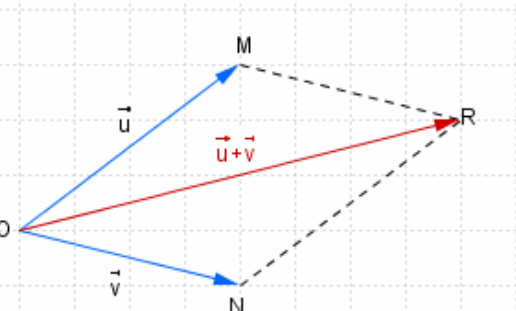
$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

##### نتيجة

لتكن  $O$  و  $M$  و  $N$  و  $R$  أربع نقط من الفضاء  
 $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OR}$  إذا وفقط إذا كان  $OMRN$  متوازي الأضلاع

**ملاحظة:** إذا كانت  $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$  و  $\vec{v} = \overrightarrow{ON}$  فان

$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OR}$  حيث  $OMRN$  متوازي الأضلاع



## ج- خاصيات

- \* لكل متجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$   $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
- \* لكل ثلاث متجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$   $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
- \* لكل متجهة  $\vec{u}$   $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

## أ- مقابل متجهة - فرق متجهتين

لتكن  $\vec{u}$  متجهة غير منعدمة في الفضاء  
مقابل المتجهة  $\vec{u}$  هي المتجهة التي لها نفس الاتجاه و نفس المنظم و منحائها مصاد لمنحى  
المتجهة  $\vec{u}$  نرسم لها بالرمز  $-\vec{u}$

- \* لكل متجهة  $\vec{u}$  :  $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$
- \* لكل نقطتين A و B من المستوى لدينا  $\vec{AB} + \vec{BA} = \vec{AA} = \vec{0}$
- المتجهتان  $\vec{AB}$  و  $\vec{BA}$  متقابلتان نكتب  $\vec{AB} = -\vec{BA}$

## ب- فرق متجهتين

### تعريف

لكل متجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$   $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$

ملاحظة لكل ثلاث نقط A و B و C  $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB}$

### أمثلة

مكعب ABCDEFGH

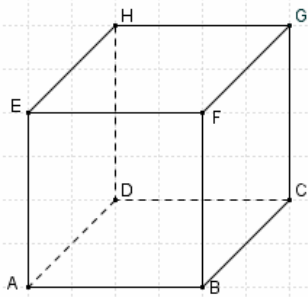
$$\vec{ED} + \vec{EF} = \vec{EC}$$

$$\vec{BC} = -\vec{HE}$$

$$\vec{AB} = \vec{HG}$$

### 4- منتصف قطعة

I منتصف [AB] إذا فقط إذا كان  $\vec{AI} = \vec{IB}$  ( $\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}$ )



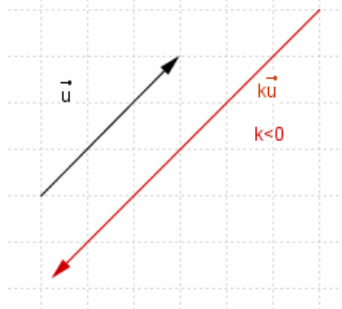
## II الاستقامية- التعريف المتجهي للمستقيم

### 1- ضرب متجهة في عدد حقيقي

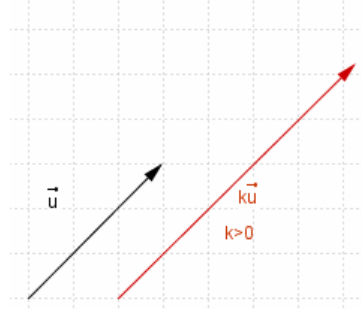
#### تعريف

$\vec{u}$  متجهة غير منعدمة و  $k$  عدد حقيقي غير منعدم  
جداء المتجهة  $\vec{u}$  في العدد الحقيقي  $k$  هي المتجهة  $k\vec{u}$  حيث :  
\*  $\vec{u}$  و  $k\vec{u}$  لهما نفس الاتجاه  
\*  $\|k\vec{u}\| = |k| \times \|\vec{u}\|$

\* منحى  $k\vec{u}$  هو  
← منحى  $\vec{u}$  إذا كان  $k > 0$   
← عكس منحى  $\vec{u}$  إذا كان  $k < 0$



$k < 0$



$k > 0$

\* لكل متجهة  $\vec{u}$  و لكل عدد حقيقي  $k$  :  $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$  و  $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

## 2 - خاصيات

مهما تكن المتجهتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و مهما يكن العددين الحقيقيين  $\alpha$  و  $\beta$  فان

$$(\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

$$\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$$

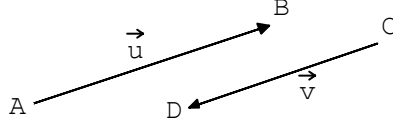
$$(\alpha\beta)\vec{u} = \alpha(\beta\vec{u})$$

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$$

$\alpha\vec{u} = \vec{0}$  إذا فقط إذا كان  $\alpha = 0$  أو  $\vec{u} = \vec{0}$

### 3- الاستقامية استقامية متجهتين أ- تعريف

تكون متجهتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  مستقيمتين إذا و فقط كانت احدهما جداء الأخرى في عدد حقيقي



#### ملاحظة

$\vec{0}$  مستقيمة مع أية متجهة

#### استقامية ثلاث نقط

#### تعريف

لتكن  $A \neq B$  و  $C$  و  $B$  و  $A$  نقاطا من الفضاء حيث  $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي  
تكون النقط  $A$  و  $B$  و  $C$  مستقيمة إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي  $\alpha$  حيث  $\vec{AC} = \alpha \vec{AB}$

#### نوازي مستقيمين

لتكن  $A \neq B$  و  $C \neq D$  و  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  نقاطا من الفضاء حيث  $(AB) \parallel (CD)$  إذا و فقط إذا كان  $\vec{AB}$  و  $\vec{CD}$  مستقيمتين

#### التعريف المتجهي لمستقيم في الفضاء

#### تعريف

لتكن  $A$  و  $B$  نقطتين مختلفتين من الفضاء  
كل متجهة  $\vec{u}$  غير منعدمة و مستقيمة مع المتجهة  $\vec{AB}$   
تسمى متجهة موجهة للمستقيم  $(AB)$

#### خاصية

لتكن  $A$  نقطة من الفضاء و  $\vec{u}$  متجهة غير منعدمة  
مجموعة النقط  $M$  من الفضاء حيث  $\vec{AM} = \alpha \vec{u}$  و  $\alpha \in \mathbb{R}$   
هي المستقيم المار من  $A$  و الموجه بـ  $\vec{u}$ . نرسم له بالرمز  
 $D(A; \vec{u})$

$$D(A; \vec{u}) = \left\{ M \in (E) / \vec{AM} = \alpha \vec{u} \quad ; \quad \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

#### تمرين

ليكن  $ABCDEFGH$  مكعبا نضع  $\vec{AB} = \vec{i}$  و  $\vec{AD} = \vec{j}$  و  $\vec{AE} = \vec{k}$  و  $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ . نعتبر  $I$  منتصف  $[HG]$

1- بين أن  $\vec{u}$  موجهة للمستقيم  $(AI)$

2- ليكن المستقيم  $(\Delta)$  المار من  $G$  و الموازي للمستقيم  $(AI)$  و  $M$  نقطة من الفضاء حيث

$$M \in (\Delta) \text{ بين أن } \vec{BM} = \frac{1}{2} \vec{AB} + 2\vec{BG}$$

#### الجواب

1- نبين أن  $\vec{u}$  موجهة للمستقيم  $(AI)$

أي نبين أن  $\vec{AI}$  و  $\vec{u}$  مستقيمتين

$$\vec{HI} = \frac{1}{2} \vec{HG} \text{ ومنه } [HG] \text{ منتصف } I$$

$$\vec{AI} = \vec{AE} + \vec{EH} + \vec{HI} = \vec{AE} + \vec{EH} + \frac{1}{2} \vec{HG}$$

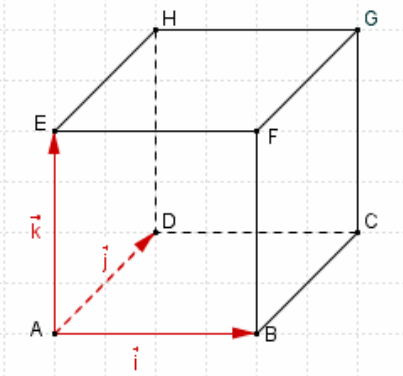
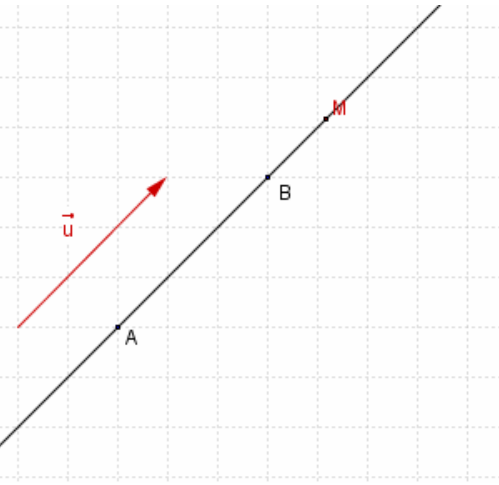
بما أن  $\vec{HG} = \vec{AB} = \vec{i}$  و  $\vec{EH} = \vec{AD} = \vec{j}$  فمكعب  $ABCDEFGH$

$$\vec{AI} = \vec{k} + \vec{j} + \frac{1}{2} \vec{i} = \frac{1}{2} (\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) = \frac{1}{2} \vec{u}$$

إذن  $\vec{AI}$  و  $\vec{u}$  مستقيمتان و منه  $\vec{u}$  موجهة للمستقيم  $(AI)$

2 نبين أن  $M \in (\Delta)$

لدينا  $(\Delta)$  المار من  $G$  و الموازي للمستقيم  $(AI)$  أي  $(\Delta) = D(G; \vec{u})$



$$\overline{GM} = \overline{GF} + \overline{FB} + \overline{BM} = \overline{GF} + \overline{FB} + \frac{1}{2}\overline{AB} + 2\overline{BG} = \overline{GF} + \overline{FB} + \frac{1}{2}\overline{AB} + 2\overline{BC} + 2\overline{CG}$$

بما أن  $ABCEFGH$  مكعب فان  $\overline{GF} = -\overline{AD} = -\vec{j}$  و  $\overline{FB} = -\overline{AE} = -\vec{k}$  و  $\overline{BC} = \vec{j}$  و  $\overline{CG} = \vec{k}$  و  $\overline{GM} = -\vec{j} - \vec{k} + \frac{1}{2}\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k} = \frac{1}{2}\vec{i} + \vec{j} + \vec{k} = \frac{1}{2}(\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}) = \frac{1}{2}\vec{u}$

و بالتالي  $M \in D(G; \vec{u})$  إذن  $M \in (\Delta)$

### (III) الاستوائية- التعريف المتجهي للمستوى -1 تعريف

ليكن  $(P)$  مستوى من الفضاء و  $A$  و  $B$  و  $C$  نقط غير مستقيمة من المستوى  $(P)$   
نقول إن  $(P)$  هو المستوى المار من  $A$  و الموجه بالمتجهين  $\overline{AB}$  و  $\overline{AC}$

#### نتيجة

متجهتان  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  غير مستقيمتين و نقطة من الفضاء تحدد مستوى وحيدا  $(P)$  هو المستوى المار من النقطة  $A$  و الموجه بالمتجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و نرسم له بالرمز  $P(A; \vec{u}; \vec{v})$ .

#### خاصية

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهين غير مستقيمتين و  $A$  نقطة من الفضاء.  
مجموعة النقط  $M$  من الفضاء حيث  $\overline{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$  و  $(x; y) \in \mathbb{R}^2$  هي المستوى  $(P)$  المار من  $A$  و الموجه بالمتجهين  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و نكتب  $(P) = P(A; \vec{u}; \vec{v})$

### -2 الاستوائية تعريف

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  ثلاث متجهات في الفضاء  
نقول إن المتجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  مستوائية إذا فقط وجدت أربع نقط مستوائية  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  حيث  $\overline{AB} = \vec{u}$  و  $\overline{AC} = \vec{v}$  و  $\overline{AD} = \vec{w}$

#### أمثلة

$ABCDEFGH$  متوازي المستطيلات

$\overline{BE}$  و  $\overline{BC}$  و  $\overline{BH}$  مستوائية لان النقط  $B$  و  $C$  و  $E$  و  $H$  مستوائية  $[(BC) \parallel (EH)]$

$\overline{BE}$  و  $\overline{BH}$  و  $\overline{BD}$  غير مستوائية لأن  $BDEH$  رباعي الأوجه

#### خاصية

لتكن  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  متجهين غير مستقيمتين و  $\vec{w}$  متجهة في الفضاء  
المتجهات  $\vec{u}$  و  $\vec{v}$  و  $\vec{w}$  مستوائية إذا فقط إذا وجد عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  حيث  $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$

#### نتيجة

إذا وجد عددين حقيقيين  $x$  و  $y$  حيث  $\overline{AM} = x\overline{AB} + y\overline{AC}$  فان  $M$  و  $C$  و  $B$  و  $A$  مستوائية

#### تمرين

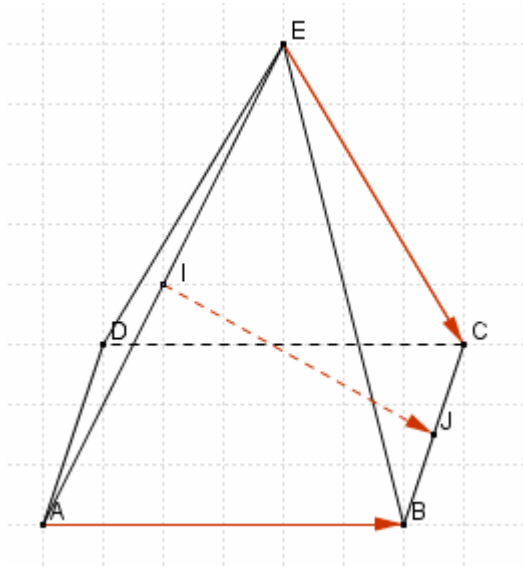
$EABCD$  هرم قاعدته المستطيل  $ABCD$ ،  $I$  و  $J$  منتصفا  $[AE]$  و  $[BC]$  على التوالي.

بين أن المتجهات  $\overline{IJ}$  و  $\overline{AB}$  و  $\overline{EC}$  مستوائية

#### الحل

$$\overline{IJ} = \overline{IA} + \overline{AB} + \overline{BJ}$$

و حيث  $I$  و  $J$  منتصفا  $[AE]$  و  $[BC]$  فان :



$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ و } \overrightarrow{IA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ و بالتالي}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ ومنه}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \text{ ومنه}$$

إذن  $\overrightarrow{IJ}$  و  $\overrightarrow{AB}$  و  $\overrightarrow{EC}$  مستوائية