السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	المتتاليـــــات العددية	سلسلة 4

تمرين 1 : نعتبر المتتاليتين العددية (u_n) و (v_n) المعرفتين كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ v_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \ ; \ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 4v_n}{5} \end{cases}$$

نعتبر المتتاليتين : $w_n = v_n - u_n$ و $t_n = 3u_n + 10v_n$

1) بين أن (w_n) متتالية هندسية ثم أوجد حدها العام.

2) بين أن (t_n) متتالية ثابتة ثم أوجد حدها العام.

3) استنتج مما سبق تعبير كل من (u_n) و (v_n) بدلالة n .

تمرين 2 : لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 و أساسها r

1) احسب r و u_0 علما أن : $u_3 + u_4 + u_5 = -9$ و $u_6 = -7$

2) احسب : $S = u_0 + u_1 + ... + u_{100}$

تمرين 3 : لتكن (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 3$ و أساسها $r = 2$

3) احسب : $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1}$ بدلالة n

4) نعتبر المتتالية : $w_n = v_n^2$

أ) بين أن (w_n) متتالية هندسية.

ب) استنتج حساب المجموع $T_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_{n-1}^2$ بدلالة n .

تمرين 4 : نعتبر المتتالية العددية u_n المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3n+1} \end{cases}$$

1) احسب u_1 و u_2

2) بين أن $u_n > 0 \quad \forall n \in IN$

3) ادرس رتابة المتتالية (u_n)

4) أ) بين أن : $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{4} \quad \forall n \in IN^*$

ب) استنتج أن $u_n \leq 8\left(\dfrac{1}{4}\right)^n \quad \forall n \in IN^*$

تمرين 5 : نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

1) بين أن $|u_n| < \dfrac{1}{2} \quad \forall n \in IN$

2) أدرس رتابة (u_n)

3) بين أن: $u_n + \dfrac{1}{2} = \left(u_0 + \dfrac{1}{2}\right)^{2^n} \quad \forall n \in IN$

تمرين 1 : $u_0=1$, $v_0=2$; $v_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}$; $u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3}$ ، $w_n=v_n-u_n$ و $t_n=3u_n+10v_n$

1

لدينا :

$$w_{n+1}=v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{u_n+4v_n}{5}-\frac{u_n+2v_n}{3}=\frac{3u_n+12v_n-5u_n-10v_n}{15}=\frac{2v_n-2u_n}{15}=\frac{2(v_n-u_n)}{15}=\frac{2}{15}w_{n+1}$$

إذن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q=\frac{2}{5}}$ و حدها الأول $\boxed{w_0=v_0-u_0=2-1=1}$

بالتالي : $\boxed{\forall n\in IN \quad w_n=w_0\times q^n=\left(\frac{2}{5}\right)^n}$

2

لدينا : $t_{n+1}=3u_{n+1}+10v_{n+1}=u_n+2v_n+2(u_n+4v_n)=u_n+2v_n+2u_n+8v_n=3u_n+10v_n=t_n$

إذن (w_n) متتالية ثابتة ، منه : $\boxed{\forall n\in IN \quad t_n=t_0=3u_0+10v_0=3+20=23}$

3

لدينا حسب ما سبق : $\begin{cases}v_n-u_n=w_n\\3u_n+10v_n=t_n\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=w_n+u_n\\3u_n+10(w_n+u_n)=t_n\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=w_n+u_n\\3u_n+10w_n+10u_n=t_n\end{cases}$

منه : $\begin{cases}v_n=w_n+u_n\\13u_n=t_n-10w_n\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=w_n+\frac{t_n-10w_n}{13}\\u_n=\frac{t_n-10w_n}{13}\end{cases}$ منه : $\begin{cases}v_n=\frac{t_n+3w_n}{13}=\frac{23+3\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13}\\u_n=\frac{t_n-10w_n}{13}=\frac{23-10\left(\frac{2}{15}\right)^n}{13}\end{cases}$

لاحظ أن السؤال الأخير يعتمد على حل نظمة من الدرجة الأولى ذات المجهولين u_n و v_n واعتبار w_n و t_n معلومين لكونهما يتوفران على الصيغة العامة لكل منهما.

تمرين 2 : (u_n) متتالية حسابية ، u_0

1

نعلم أن : $u_3+u_4+u_5=u_0+3r+u_0+4r+u_0+5r=3u_0+12r$ و $u_6=u_0+6r$

لدينا : $u_3+u_4+u_5=-9$ و $u_6=-7$

إذن نحصل على النظمة : $\begin{cases}u_0+6r=-7\\3u_0+12r=-9\end{cases}$ منه : $\begin{cases}u_0=-7-6r\\3(-7-6r)+12r=-9\end{cases}$

منه : $\begin{cases}u_0=-7-6r\\-21-18r+12r=-9\end{cases}$ منه : $\begin{cases}u_0=-7-6r\\-6r=-9+21=12\end{cases}$ منه : $\boxed{\begin{cases}u_0=-7+12=5\\r=\frac{12}{-6}=-2\end{cases}}$

2

$$\boxed{\begin{array}{l}S=u_0+u_1+\ldots+u_{100}=\frac{u_0+u_{100}}{2}\times 101=101\frac{5+u_0+100r}{2}=101\frac{5+5-200}{2}=101\times\frac{-190}{2}\\S=101\times(-95)=-9595\end{array}}$$

تمرين 3 : (v_n) متتالية هندسية ، $v_0=3$ ، $r=2$

1	$\boxed{S_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} = v_0 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 3 \times \frac{1-2^n}{1-2} = 3\frac{1-2^n}{-1} = 3(2^n - 1)}$	
2	$w_n = v_n^2$	
	أ)	لدينا متتالية هندسية أساسها $r=2$ منه : $v_{n+1} = 2\,v_n$ منه : $w_{n+1} = v_{n+1}^2 = (2\,v_n)^2 = 4\,v_n^2 = 4\,w_n$ إذن : (w_n) متتالية هندسية أساسها $q=4$
	ب)	$\boxed{T_n = v_0^2 + v_1^2 + ... + v_{n-1}^2 = w_0 + w_1 + ... + w_{n-1} = w_0\frac{1-q^n}{1-q} = v_0^2\frac{1-4^n}{1-4} = 9\frac{1-4^n}{-3} = 9\frac{4^n-1}{3} = 3(4^n-1)}$

تمرين 4 : $u_0 = 2 \;\; ; \;\; u_{n+1} = \frac{u_n}{3n+1}$

1	$u_1 = \frac{u_0}{0+1} = 2$	$u_2 = \frac{u_1}{3+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
2	بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $u_0 = 2 > 0$ نفترض أن $u_n > 0$ لدينا : $n \geq 0$ منه : $3n+1 \geq 1 > 0$ ، إذن $\frac{u_n}{3n+1} > 0$ أي $u_{n+1} > 0$ بالتالي : $\boxed{\forall n \in IN \;\; u_n > 0}$	
3	لدينا : $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3n+1} - u_n = u_n\left(\frac{1}{3n+1} - 1\right) = u_n\frac{1-3n-1}{3n+1} = -\frac{3\,n\,u_n}{3n+1} \leq 0$ بالتالي (u_n) متتالية تناقصية.	
4	أ)	لدينا $\frac{1}{4} - \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} - \frac{\frac{u_n}{3n+1}}{u_n} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3n+1} = \frac{3n+1-4}{4(3n+1)} = \frac{3n-3}{4(3n+1)} = \frac{3(n-1)}{4(3n+1)}$ إذن لكل $n \in IN^*$ لدينا $\frac{3(n-1)}{4(3n+1)} \geq 0$ و منه $\boxed{\forall n \in IN^* \;\; \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{4}}$
	ب)	لدينا حسب السؤال السابق : $\frac{u_2}{u_1} \leq \frac{1}{4}$ و $\frac{u_3}{u_2} \leq \frac{1}{4}$ و $\cdots$ و $\frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \frac{1}{4}$ و بضرب هذه المتفاوتات (ذات الأطراف الموجبة) طرفا بطرف نجد أن : $\frac{u_2}{u_1} \times \frac{u_3}{u_2} \times ... \times \frac{u_n}{u_{n-1}} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ أي : $\frac{u_n}{u_1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$ منه : $u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} u_0$ منه : $u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \times 2$ منه : $u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 4 \times 2$ بالتالي : $\boxed{\forall n \in IN^* \;\; u_n \leq 8\left(\frac{1}{4}\right)^n}$

تمرين 5 : $u_0 = 0 \;\; ; \;\; u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4}$

1	بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $\lvert u_0 \rvert = 0$ منه $\lvert u_0 \rvert < \frac{1}{2}$ نفترض أن $\lvert u_n \rvert < \frac{1}{2}$ ونبين أن $\lvert u_{n+1} \rvert < \frac{1}{2}$

	لدينا : $u_{n+1} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}$ $\lvert u_n\rvert < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} < u_n < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < u_n + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow 0 < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$ $\lvert u_n\rvert < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} < \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{-1}{2} < u_{n+1} < \frac{-1}{4} < \frac{1}{2} \Rightarrow \lvert u_{n+1}\rvert < \frac{1}{2}$ بالتالي : $\boxed{\forall n \in IN \ \lvert u_n \rvert < \frac{1}{2}}$	
2	لدينا : $u_{n+1} - u_n = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} - u_n = u_n^2 - \frac{1}{4}$ وبما أن $\lvert u_n\rvert < \frac{1}{2}$ فإن $u_n^2 < \frac{1}{4}$ أي : $u_n^2 - \frac{1}{4} < 0$ بالتالي (u_n) متتالية تناقصية.	
3	بالنسبة لـ $n=0$ ، لدينا : $\left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^0} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^1 = u_0 + \frac{1}{2}$ نفترض أن $u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}$ ونبين أن: $u_{n+1} + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$ لدينا : $u_{n+1} + \frac{1}{2} = u_n^2 + u_n - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = u_n^2 + u_n + \frac{1}{4} = \left(u_n + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2$ $u_{n+1} + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n \times 2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}$ بالتالي : $\boxed{\forall n \in IN \ u_n + \frac{1}{2} = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)^{2^n}}$	