السنة 1 بكالوريا علوم تجريبية	تحليلية الجداء السلمي	سلسلة 1

تمرين 1 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر النقط : $A(-1,1)$ و $B(-1,3)$ و $C(-4,4)$ و $D(1,1)$ و $E(-4,-2)$

1) أحسب: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE}$ ، ماذا تستنتج ؟

2) بين أن : $(BE)\perp(CD)$

3) بين أن: $(AM)\perp(BC)$ حيث M منتصف $[DE]$

تمرين 2 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر النقط : $A(1\,;\,1)$ و $B(1\,;\,3)$ و $C(-1\,;1)$ و $D\left(0\ ;\ 1+\sqrt{3}\right)$

1) بين أن ABC مثلث قائم الزاوية في A

2) أ) أحسب : $\left\|\overrightarrow{CA}\right\|$ و $\left\|\overrightarrow{CB}\right\|$ و $\left\|\overrightarrow{CD}\right\|$

ب) أحسب : $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}$

3) أ) أحسب : $\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ و $\sin\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ و $\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$ و $\sin\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$

ب) استنتج قياسي الزاويتين : $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)$ و $\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD}\right)$

4) تحقق أن: $\left(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD}\right)=\frac{\pi}{12}$

5) استنتج حساب: $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$

تمرين 3 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر النقط : $A(2,2)$ و $B(-1,1)$ و $C(0,-1)$

1) أ) أنشئ النقط A و B و C

2) أ) أوجد معادلة المستقيم (Δ) المار من B و العمودي على (AC).

ب) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AC)

ج) حدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع (Δ) و (AC)

3) احسب $\cos\left(\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}\right)$

4) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (L) واسط القطعة $[AB]$

تمرين 4 : المستوى (P) منسوب إلى م.م.م $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

نعتبر النقط : $A\left(1,2\sqrt{3}\right)$ و $B\left(0,\sqrt{3}\right)$ و $C(1,0)$

1) بين أن ABC متساوي الساقين في النقطة B

2) أحسب : $\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$ و $\tan\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)$

3) حدد معادلة ديكارتية للارتفاع المنشأ من النقطة B للمثلث ABC

4) حدد معادلة ديكارتية للمتوسط المار من النقطة C للمثلث ABC

5) حدد إحداثيتي G مركز ثقل المثلث ABC

6) احسب مساحة المثلث ABC

7) أ) حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (BC)

ب) احسب مسافة A عن المستقيم (BC)

تمرين 1 : $A(-1,1)$ و $B(-1,3)$ و $C(-4,4)$ و $D(1,1)$ و $E(-4,-2)$

1

لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ ، $\overrightarrow{AB}(0 ; 2)$ و $\overrightarrow{AD}(x_D - x_A ; y_D - y_A)$ ، $\overrightarrow{AD}(2 ; 0)$ منه : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0\times 2 + 0\times 2 = 0 + 0 = 0}$

نستنتج إذن أن : $\boxed{(AB)\perp(AD)}$

و أيضا : $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B ; y_C - y_B)$ ، $\overrightarrow{BC}(-3 ; 1)$ و $\overrightarrow{DE}(x_E - x_D ; y_E - y_D)$ ، $\overrightarrow{DE}(-5 ; -3)$

منه : $\boxed{\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{DE} = (-3)\times(-5) + 1\times(-3) = 15 + (-3) = 12}$

2

لدينا : $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C ; y_D - y_C)$ ، $\overrightarrow{CD}(5 ; -3)$ و $\overrightarrow{BE}(x_E - x_B ; y_E - y_B)$ ، $\overrightarrow{BE}(-3 ; -5)$

منه : $\overrightarrow{BE}.\overrightarrow{CD} = -3\times 5 + (-5)\times(-3) = -15 + 15 = 0$ بالتالي : $\boxed{(BE)\perp(CD)}$

3

لدينا M منتصف $[DE]$ إذن : $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_D + x_E}{2} = \dfrac{-3}{2} \\ y_M = \dfrac{y_D + y_E}{2} = \dfrac{-1}{2} \end{cases}$

إذن : $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B ; y_C - y_B)$ ، $\overrightarrow{BC}(-3 ; 1)$ و $\overrightarrow{AM}(x_M - x_A ; y_M - y_A)$ ، $\overrightarrow{AM}\left(\dfrac{-1}{2} ; \dfrac{-3}{2}\right)$

منه : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} = -3\times\left(\dfrac{-1}{2}\right) + 1\times\left(\dfrac{-3}{2}\right) = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2} = 0$ بالتالي: $\boxed{(AM)\perp(BC)}$

لإثبات التعامد نبرهن أن الجداء السلمي منعدم.

تمرين 2 : $A(1 ; 1)$ و $B(1 ; 3)$ و $C(-1 ; 1)$ و $D(0 ; 1+\sqrt{3})$

1

لدينا $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A ; y_B - y_A)$ ، $\overrightarrow{AB}(0 ; 2)$ و $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A ; y_C - y_A)$ ، $\overrightarrow{AC}(-2 ; 0)$ منه : $\boxed{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0\times(-2) + 0\times 2 = 0 + 0 = 0}$

نستنتج إذن أن : $\boxed{(AB)\perp(AC)}$ بالتالي ABC مثلث قائم الزاوية في A

2

أ) لدينا $\overrightarrow{CA}(2 ; 0)$ و $\overrightarrow{CB}(x_B - x_C ; y_B - y_C)$ ، $\overrightarrow{CB}(2 ; 2)$ و $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C ; y_D - y_C)$ ، $\overrightarrow{CD}(1 ; \sqrt{3})$

إذن: $\|\overrightarrow{CA}\| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$ و $\|\overrightarrow{CB}\| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

و $\|\overrightarrow{CD}\| = \sqrt{1^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

ب) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = 2\times 2 + 0\times 2 = 4$ و $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD} = 2\times 1 + 0\times\sqrt{3} = 2$

3

أ) $\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \dfrac{\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|} = \dfrac{4}{2\times 2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}) = \dfrac{\det(\overrightarrow{CA}\overrightarrow{CB})}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|} = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}}{2\times 2\sqrt{2}} = \dfrac{4-0}{4\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{\det(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{\begin{vmatrix}2&0\\1&\sqrt{3}\end{vmatrix}}{2\times 2}=\frac{2\sqrt{3}-0}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$ و $$\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{2}{2\times 2}=\frac{1}{2}$$

ب) بما أن : $\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=\frac{\sqrt{2}}{2}$ فإن: $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})\equiv\frac{\pi}{4}\ [2\pi]$

و بما أن : $\cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{1}{2}$ و $\sin(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{\sqrt{3}}{2}$ فإن: $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})\equiv\frac{\pi}{3}\ [2\pi]$

4 لدينا : $(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CA})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=-(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})+(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CD})=\frac{-\pi}{4}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{12}\ [2\pi]$

5

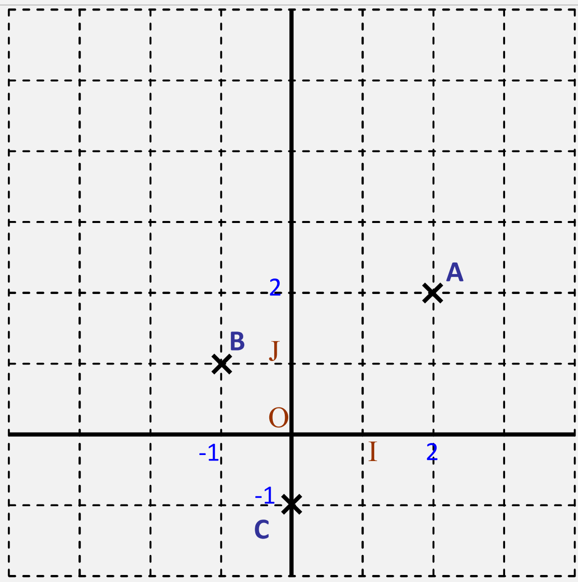
$$Cos\frac{\pi}{12}=Cos(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=\frac{\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CD}}{\|\overrightarrow{CB}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{2\times1+2\times\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\times 2}=\frac{2+2\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\frac{(1+\sqrt{3})\times\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$Sin\frac{\pi}{12}=Sin(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})=\frac{\det(\overrightarrow{CB},\overrightarrow{CD})}{\|\overrightarrow{CB}\|\|\overrightarrow{CD}\|}=\frac{\begin{vmatrix}2&2\\1&\sqrt{3}\end{vmatrix}}{2\sqrt{2}\times 2}=\frac{2\sqrt{3}-2}{4\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-1)\times\sqrt{2}}{4}=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

يمكن تحديد قياس زاوية و ذلك بحساب جيبها و جيب تمامها.

تمرين 3 : $A(2,2)$ و $B(-1,1)$ و $C(0,-1)$

1



2

أ) لنحدد معادلة المستقيم (Δ) المار من B و العمودي على (AC).

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، لدينا : $\overrightarrow{BM}(x+1\ ;\ y-1)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\ ;\ -3)$

$$M\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow -2(x+1)-3(y-1)=0\Leftrightarrow -2x-2-3y+3=0\Leftrightarrow -2x-3y+1=0$$

بالتالي : $\boxed{(\Delta):\ -2x-3y+1=0}$ أو أيضا : $\boxed{(\Delta):\ 2x+3y-1=0}$

ب) لنحدد حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (AC)

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، لدينا : $\overrightarrow{AM}(x-2\ ;\ y-2)$ و $\overrightarrow{AC}(-2\ ;\ -3)$

$$M\in(AC)\Leftrightarrow\det(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC})=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-2&y-2\\-2&-3\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -3(x-2)+2(y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow -3x+6+2y-4=0\Leftrightarrow -3x+2y+2=0$$

بالتالي : $\boxed{(AC):\ -3x+2y+2=0}$ أو أيضا : $\boxed{(AC):\ 3x-2y-2=0}$

ج) حدد زوج إحداثيتي H نقطة تقاطع (Δ) و (AC)

إذن لنحل النظمة المكونة من معادلتي (Δ) و (AC) ، أي: $\begin{cases}2x+3y=1\\3x-2y=2\end{cases}$

لدينا المحددة هي: $\Delta=\begin{vmatrix}2&3\\3&-2\end{vmatrix}=-4-9=-13$ و $\Delta_x=\begin{vmatrix}1&3\\2&-2\end{vmatrix}=-2-6=-8$

و $\Delta_y=\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=4-3=1$ ، منه: $x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{8}{13}$ و $y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-1}{13}$ بالتالي: $\boxed{H\left(\frac{8}{13};\frac{-1}{13}\right)}$

3 لدينا: $\overrightarrow{CA}(2\ ;3)$ و $\overrightarrow{CB}(-1\ ;2)$ إذن: $\|\overrightarrow{CA}\|=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$ و $\|\overrightarrow{CB}\|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$$\cos\left(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}\right)=\frac{\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}}{\|\overrightarrow{CA}\|\|\overrightarrow{CB}\|}=\frac{-2+6}{\sqrt{13}\times\sqrt{5}}=\frac{4}{\sqrt{65}}=\frac{4\sqrt{65}}{65}$$

4 لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (L) و اسط القطعة $[AB]$

نعتبر K منتصف $[AB]$ ، إذن: $K\left(\frac{2+(-1)}{2};\frac{2+1}{2}\right)$ أي: $K\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى. لدينا: $\overrightarrow{AB}(-3\ ;-1)$ و $\overrightarrow{KM}\left(x-\frac{1}{2}\ ;\ y-\frac{3}{2}\right)$

$$M\in(L)\Leftrightarrow\overrightarrow{KM}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow-3\left(x-\frac{1}{2}\right)-\left(y-\frac{3}{2}\right)=0\Leftrightarrow-3x+\frac{3}{2}-y+\frac{3}{2}=0\Leftrightarrow-3x-y+3=0$$

بالتالي: $\boxed{(L):3x+y-3=0}$

- لإيجاد إحداثيتي نقطة تقاطع مستقيمين نحل النظمة المكونة من معادلتيهما الديكارتيتين
- لإيجاد معادلة ديكارتية لواسط قطعة نحدد أولا إحداثيتي منتصف هذه القطعة فيكون الواسط مستقيما مارا بهذه النقطة و تكون المتجهة التي طرفاها هما طرفي القطعة منظمية عليه...
- يستحسن جعل معامل x موجبا في معادلة مستقيم وذلك بضرب جميع المعاملات في -1

تمرين 4 : $A(1,2\sqrt{3})$ و $B(0,\sqrt{3})$ و $C(1,0)$

1 لدينا: $\overrightarrow{BA}(1\ ;\sqrt{3})$ و $\overrightarrow{BC}(1\ ;-\sqrt{3})$ إذن: $\|\overrightarrow{BA}\|=\sqrt{1+3}=2$ و $\|\overrightarrow{BC}\|=\sqrt{1+3}=2$

بالتالي: ABC متساوي الساقين في النقطة B

2 $\boxed{\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|}=\frac{1-3}{2\times2}=\frac{-1}{2}}$ و $\sin\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\det\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}{\|\overrightarrow{BA}\|\|\overrightarrow{BC}\|}=\frac{\begin{vmatrix}1&\sqrt{3}\\1&-\sqrt{3}\end{vmatrix}}{2\times2}=\frac{-2\sqrt{3}}{4}=\frac{-\sqrt{3}}{2}$

منه: $\boxed{\tan\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)=\frac{\sin\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}{\cos\left(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}\right)}=\frac{-\sqrt{3}}{2}\times\frac{2}{-1}=\sqrt{3}}$

3 ليكن (Δ) الارتفاع المنشأ من النقطة B للمثلث ABC

إذن (Δ) يمر من B و عمودي على (AC)

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى. لدينا: $\overrightarrow{AC}(0\ ;-2\sqrt{3})$ و $\overrightarrow{BM}(x\ ;\ y-\sqrt{3})$

$$M\in(\Delta)\Leftrightarrow\overrightarrow{BM}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow0\times x-2\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow-2\sqrt{3}\left(y-\sqrt{3}\right)=0\Leftrightarrow y-\sqrt{3}=0$$

بالتالي: $\boxed{(\Delta):\ y-\sqrt{3}=0}$

4 ليكن E منتصف $[AB]$ ، إذن المتوسط المار من النقطة C للمثلث ABC هو المستقيم (EC)

لنحدد إذن لنحدد حدد معادلة ديكارتية للمستقيم (EC)، لدينا : $E\left(\frac{1}{2};\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى، لدينا : $\overrightarrow{CM}(x-1\ ;\ y)$ و $\overrightarrow{EC}\left(\frac{1}{2};-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

$$M\in(EC)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{EC}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y\\ \frac{1}{2} & -\frac{3\sqrt{3}}{2}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -\frac{3\sqrt{3}}{2}(x-1)+\frac{1}{2}y=0$$

$$\Leftrightarrow -3\sqrt{3}(x-1)+y=0\Leftrightarrow -3\sqrt{3}\,x+y-3\sqrt{3}=0$$

بالتالي : $\boxed{(EC):\ \ 3\sqrt{3}\,x-y+3\sqrt{3}=0}$

5 لنحدد إحداثيتي G مركز ثقل المثلث ABC ، نعلم أن : $\begin{cases} x_G=\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{2}{3}\\ y_G=\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\sqrt{3}\end{cases}$ منه: $\boxed{G\left(\frac{2}{3};\sqrt{3}\right)}$

6 مساحة المثلث ABC هي: $S_{ABC}=\dfrac{\left|\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\right|}{2}$ ولدينا : $\overrightarrow{AB}(-1\,;-\sqrt{3})$ و $\overrightarrow{AC}(0\,;-2\sqrt{3})$

منه: $\boxed{S_{ABC}=\dfrac{\left|\begin{vmatrix}-1 & -\sqrt{3}\\ 0 & -2\sqrt{3}\end{vmatrix}\right|}{2}=\dfrac{\left|2\sqrt{3}\right|}{2}=\sqrt{3}}$

7

أ) لنحدد معادلة ديكارتية للمستقيم (BC)، لتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوى.

لدينا : $\overrightarrow{CM}(x-1\ ;\ y)$ و $\overrightarrow{BC}(1\ ;-\sqrt{3})$

$$M\in(BC)\Leftrightarrow \det\left(\overrightarrow{CM},\overrightarrow{BC}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix} x-1 & y\\ 1 & -\sqrt{3}\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow -\sqrt{3}(x-1)-y=0\quad\Leftrightarrow -\sqrt{3}\,x-y+\sqrt{3}=0$$

بالتالي : $\boxed{(BC):\ \ \sqrt{3}\,x+y-\sqrt{3}=0}$

ب) $\boxed{d(A;(BC))=\dfrac{\left|\sqrt{3}x_A+y_A-\sqrt{3}\right|}{\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}}=\dfrac{\left|\sqrt{3}+2\sqrt{3}-\sqrt{3}\right|}{2}=\sqrt{3}}$

للتذكير ارتفاع مثلث هو مستقيم يمر من أحد رؤوسه و عمودي على حامل الضلع المقابل لهذا الرأس، أما المتوسط فهو مستقيم يمر من أحد رؤوسه و منتصف الضلع المقابل لهذا الرأس.