المتتاليات العددية

I) عموميات.

1) تعريف:

نسمي متتالية عددية كل تطبيق U من جزء I من $\mathbb{N}$ نحو $\mathbb{R}$:

$$U : I \to \mathbb{R}$$
$$n \to u(n)$$

2) المتتاليات المحدودة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in I}$:

a) مكبورة إذا وفقط إذا وجد عدد M بحيث $(\forall n\in I)\ U_n \leq M$.

b) مصغورة إذا وفقط إذا وجد عدد m بحيث $(\forall n\in I)\ U_n \geq m$.

c) محدودة إذا وفقط إذا كانت مكبورة ومصغورة يعني.

إذا وجد عددين m و M بحيث $(\forall n\in I) : m \leq u_n \leq M$.

ملاحظة:

تكون $(U_n)_{n\in I}$ محدودة إذا وجد $k \geq 0$ بحيث $(\forall n\in I) : |U_n| \leq k$

3) المتتالية الرتيبة:

تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

a) تزايدية إذا وفقط إذا كان $U_n \leq U_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

b) تزايدية قطعا إذا وفقط إذا كان $U_n \langle U_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

c) تناقصية إذا وفقط إذا كان $U_n \geq U_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

d) تناقصية قطعا إذا وفقط إذا كان $U_n \rangle U_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

e) ثابتة إذا وفقط إذا كان $U_n = U_{n+1}$ $(\forall n\in\mathbb{N})$.

ملاحظات:

1) إذا كانت (U_n) تزايدية فإن $p \langle n \Rightarrow u_p \leq u_n$.

2) إذا كانت (U_n) تناقصية فإن $p \langle n \Rightarrow u_p \geq u_n$.

3) من أجل دراسة رتابة المتتالية (U_n) نقوم بدراسة إشارة $u_{n+1} - u_n$.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \geq 0$ فإن (U_n) تزايدية.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \rangle 0$ فإن (U_n) تزايدية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \leq 0$ فإن (U_n) تناقصية.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n \langle 0$ فإن (U_n) تناقصية قطعا.

*) إذا كانت $u_{n+1} - u_n = 0$ فإن (U_n) ثابتة.

II) المتتالية الحسابية

1) تعريف:

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ حسابية إذا وفقط وجد عدد حقيقي r

بحيث $\boxed{U_{n+1} = U_n + r}\ (\forall n\in\mathbb{N})$

r يسمى أساس المتتالية.

ملاحظات:

a) تكون المتتالية (U_n) حسابية إذا وفقط إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن (U_n) حسابية نقوم بحساب $u_{n+1} - u_n$ ونجد $u_{n+1} - u_n = cte$ وتكون الثابتة هي الأساس.

c) تكون الأعداد a وb وc في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة المتتالية حسابية إذا كان $a + c = 2b$ يعني $\frac{a+b}{2} = b$.

2) الحد العام.

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا $\boxed{U_n = U_0 + nr}\ (\forall n\in\mathbb{N})$

ملاحظة:

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو: $U_n = U_1 + (n-1)r$.

2) إذا كان الحد الأول هو u_2 فإن الحد العام هو: $U_n = U_2 + (n-2)r$.

3) بصفة عامة: إذا كان U_n وU_p حدين من متتالية حسابية أساسها r فإن $\boxed{U_n = U_p + (n-p)r}$

(ترتيب n وp غير مهم).

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية حسابية:

لتكن (U_n) متتالية حسابية أساسها r وحدها الأول u_0

لدينا:

$$\boxed{S = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n = (n+1)\frac{(u_0 + u_n)}{2}}$$

u_0 الحد الأول للمجموع S

u_n الحد الأخير للمجموع S

$n+1$ عدد حدود المجموع S .

ملاحظة:

1) $u_1 + u_2 + \ldots. + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$.

2) $u_0 + u_1 + \ldots. + u_{n-1} = n\frac{u_0 + u_{n-1}}{2}$.

3) بصفة عامة

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \ldots. + u_n = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}}.$$

III) المتتاليات الهندسية.

1) **تعريف:**

نقول إن المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ هندسية إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي q

بحيث: $\boxed{U_{n+1} = q.U_n}\ (\forall n\in\mathbb{N})$

العدد q يسمى أساس المتتالية

ملاحظات:

a) تكون متتالية (حدودها غير منعدمة) هندسية إذا وفقط إذا كان خارج حدين متتابعين ثابت وتكون هذه الثابتة هي الأساس.

b) لكي نبين أن المتتالية (U_n) هندسية يستحسن حساب U_{n+1} بدلالة U_n ونجد $u_{n+1} = q \cdot u_n$.

c) تكون الأعداد a وb وc في هذا الترتيب ثلاث حدود متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $ac = b^2$.

Moutamadris.ma

2) الحد العام:

لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول u_0

لدينا $\boxed{u_n = u_0 \cdot q^n}$ ؛ $(\forall n \in \mathbb{N})$.

ملاحظة:

1) إذا كان الحد الأول هو u_1 فإن الحد العام هو $u_n = u_1 \cdot q^{n-p}$

2) بصفة عامة: إذا كان u_p و u_n حدين من متتالية هندسية أساسها q فإن $\boxed{u_n = u_p \cdot q^{n-p}}$

(ترتيب n و p غير مهم).

3) مجموع حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

لتكن (U_n) متتالية هندسية أساسها q وحدها الأول U_0.

مع $(q \neq 1)$.

$$\boxed{S = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 . \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

u_0: الحد الأول للمجموع S.

$(n+1)$: عدد حدود المجموع S.

ملاحظة:

1) إذا كان $q=1$ فإن $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n+1)u_0$

2) $q \neq 1$: $u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$.

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$$

بصفة عامة

$$\boxed{u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}}$$

Moutamadris.ma