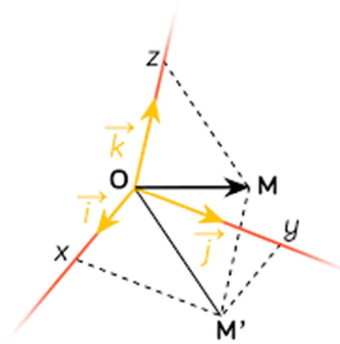
تحليلية الفضاء

إحداثيتي نقطة بالنسبة لمعلم-إحداثيات متجهة بالنسبة لأساس

إذا كانت $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ ثلاث متجهات غير مستوائية و O نقطة من الفضاء .
نقول إن المثلوث $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ أساس للفضاء و أن المربوع $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلم للفضاء



ليكن $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ معلما في الفضاء و لتكن M نقطة من الفضاء

- لدينا : $\overrightarrow{OM}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

المثلوث $\left(x,y,z\right)$ يسمى إحداثيات M بالنسبة للمعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ و نكتب $M\left(x,y,z\right)$

x يسمى أفصول النقطة M
y يسمى أرتوب النقطة M
z يسمى أنسوب النقطة M

- لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء توجد ثلاثة أعداد x و y و z حيث $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

لتكن $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$ متجهتين من الفضاء المنسوب إلى أساس $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ و ليكن $\alpha\in\mathbb{R}$

- $\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=x' \\ y=y' \\ z=z' \end{array}\right\}$
- مجموع المتجعتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ هو المتجهة : $\vec{u}+\vec{v}\left(x+x',y+y',z+z'\right)$
- ضرب عدد في متجهة : $\alpha\vec{u}\left(\alpha x,\alpha y,\alpha z\right)$

لتكن $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $B\left(x_B,y_B,z_B\right)$ نقطتين من الفضاء المنسوب إلى معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ و لتكن I منتصف القطعة $\left[AB\right]$ ، لدينا :

- إحداثيات المتجهة $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\left(x_B-x_A,y_B-y_A,z_B-z_A\right)$
- إحداثيات I منتصف القطعة $\left[AB\right]$: $I\left(\frac{x_A+x_B}{2},\frac{y_A+y_B}{2},\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

شرط استقامية متجهتين

لتكن $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$ متجهتين من الفضاء.

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتان $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$ و $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}=0$
- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix}\neq 0$

المتجهات المستوائية

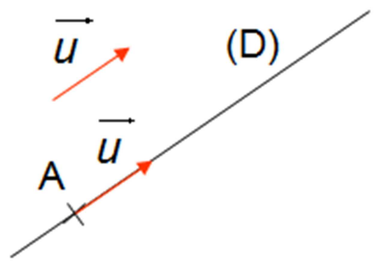
لتكن $\vec{u}\left(x,y,z\right)$ و $\vec{v}\left(x',y',z'\right)$ و $\vec{w}\left(x'',y'',z''\right)$ ثلاث متجهات من الفضاء.

- $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ مستوائية $\Leftrightarrow dét\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=0$

❖ $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ غير مستوائية $\Leftrightarrow$ $d\acute{e}t\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)\neq 0$

حيث : $$d\acute{e}t\left(\vec{u},\vec{v},\vec{w}\right)=\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}=x\begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix}+z\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

تمثيل بارامتري لمستقيم



الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

لتكن $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ متجهة غير منعدمة .

$$M\in\left(D\right)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=t\vec{u}\quad\left(t\in\mathbb{R}\right)$$

النظمة : $\left(t\in\mathbb{R}\right)\quad\begin{cases} x=x_A+t\alpha \\ y=y_A+t\beta \\ z=z_A+t\gamma \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستقيم $\left(D\right)$ المار من $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و الموجه بالمتجهة $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$

معادلتان ديكارتيتان لمستقيم في الفضاء

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

إذا كان $\left(D\right)$ مستقيما مارا من النقطة $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ متجهة موجهة له فإن النظمة :

$\frac{x-x_A}{\alpha}=\frac{y-y_A}{\beta}=\frac{z-z_A}{\gamma}$ تسمى نظمة معادلتين ديكارتيتين للمستقيم $\left(D\right)$ (مع $\alpha\neq 0$ و $\beta\neq 0$ و $\gamma\neq 0$)

تمثيل بارامتري لمستوى

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

لتكن $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ نقطة من الفضاء و $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ و $\vec{u}'\left(\alpha',\beta',\gamma'\right)$ متجهتين غير منعدمتين

$$M\in(P)\Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=t\vec{u}+t'\vec{u}' \quad \left((t,t')\in\mathbb{R}^2\right)$$

النظمة : $\left((t,t')\in\mathbb{R}^2\right)$ $\begin{cases} x=x_A+t\alpha+t'\alpha' \\ y=y_A+t\beta+t'\beta' \\ z=z_A+t\gamma+t'\gamma' \end{cases}$ تسمى تمثيلا بارامتريا للمستوى (P) المار من

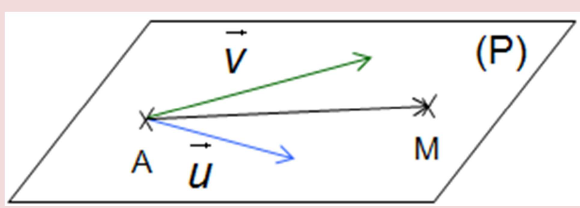
$A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ و $\vec{u}'\left(\alpha',\beta',\gamma'\right)$

معادلة ديكارتية لمستوى

الفضاء منسوب إلى معلم $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$

ليكن (P) لمستوى المار من النقطة $A\left(x_A,y_A,z_A\right)$ و الموجه بالمتجهتين $\vec{u}\left(\alpha,\beta,\gamma\right)$ و $\vec{v}\left(\alpha',\beta',\gamma'\right)$

$$M\left(x,y,z\right)\in(P)\Leftrightarrow d\acute{e}t\left(\overrightarrow{AM},\vec{u},\vec{v}\right)=0$$



معادلة ديكارتية للمستوى (P) تكتب على شكل : $ax+by+cz+d=0$ $\left(\left(a,b,c\right)\neq(0,0,0)\right)$

الأوضاع النسبية للمستقيمات و المستويات في الفضاء

الأوضاع النسبية لمستقيمين في الفضاء

ليكن $(D)=D(A,\vec{u})$ و $(\Delta)=D(B,\vec{v})$ مستقيمين في الفضاء

- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين و $A\in(\Delta)$ أو $B\in(D)$ فإن $(D)=(\Delta)$
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيميتين و $A\notin(\Delta)$ فإن (D) و (Δ) متوازيان قطعا
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $dét\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)=0$ فإن (D) و (Δ) متقاطعان
- إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيميتين و $dét\left(\overrightarrow{AB},\vec{u},\vec{v}\right)\neq 0$ فإن (D) و (Δ) غير مستوائيين

الأوضاع النسبية لمستويين في الفضاء

ليكن $(P)=P(A,\vec{u},\vec{v})$ و $(Q)=P(B,\vec{u}',\vec{v}')$ مستويين في الفضاء

- (P) و (Q) متوازيين إذا وفقط إذا كانت $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{u}')=0$ و $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{v}')=0$
أي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ مستوائية
- (P) و (Q) متقاطعان إذا وفقط إذا كانت $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{u}')\neq 0$ و $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{v}')\neq 0$
أي $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{u}'$ و $\vec{v}'$ غير مستوائية

$(P): ax+by+cz+d=0$ حيث $(a,b,c)\neq(0,0,0)$
و $(Q): a'x+b'y+c'z+d'=0$ حيث $(a',b',c')\neq(0,0,0)$

- (P) و (Q) متقاطعان إذا وفقط إذا كانت $\begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix}\neq 0$ أو $\begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix}\neq 0$
- (P) و (Q) متوازيان قطعا إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم λ بحيث :
$a'=\lambda a$ و $b'=\lambda b$ و $c'=\lambda c$ و $d'\neq\lambda d$
- (P) و (Q) منطبقين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير منعدم λ بحيث :
$a'=\lambda a$ و $b'=\lambda b$ و $c'=\lambda c$ و $d'=\lambda d$

الأوضاع النسبية لمستقيم و مستوى في الفضاء

ليكن $(P)=P(A,\vec{u},\vec{v})$ **مستوى في الفضاء و** $(D)=D(B,\vec{w})$ **مستقيم في الفضاء**

- (D) **و** (P) **متوازيان إذا وفقط إذا كانت** $\vec{u}$ **و** $\vec{v}$ **و** $\vec{w}$ **مستوائية أي** $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{w})=0$
- (D) **و** (P) **متقاطعان إذا وفقط إذا كانت** $\vec{u}$ **و** $\vec{v}$ **و** $\vec{w}$ **غير مستوائية أي** $dét(\vec{u},\vec{v},\vec{w})\neq 0$