عموميات حول الدوال

I- دالة زوجية – دالة فردية

1) من أجل دراسة زوجية دالة، نقوم بتحديد D_f ونتحقق أن لكل x من D_f لدينا $-x\in D_f$ ثم نحسب $f(-x)$.

*) إذا وجدنا $f(-x)=f(x)$ فإن f زوجية.

*) إذا وجدنا $f(-x)=-f(x)$ فإن f فردية.

2)*) يمكن لدالة أن لا تكون لا زوجية ولا فردية.

*) $(-x)^n=\begin{cases} x^n \; ; & n \text{ زوجي} \\ -x^n \; ; & n \text{ فردي} \end{cases}$ $|-x|=|x|$

3) تكون f زوجية إذا وفقط إذا كان C_f متماثلا بالنسبة لمحور الأراتيب.

4) تكون f فردية إذا وفقط إذا كان C_f متماثلا بالنسبة لأصل المعلم.

II- رتابة دالة

1) من أجل دراسة رتابة دالة f على مجال I: نعتبر x و y من I بحيث $x\langle y$ ونقارن $f(x)$ و $f(y)$.

*) إذا وجدنا $f(x)\le f(y)$ $(f(x)\langle f(y))$ فإن f تزايدية (قطعا) على I .

*) إذا وجدنا $f(x)\ge f(y)$ $(f(x)\rangle f(y))$ فإن f تناقصية (قطعا) على I .

*) إذا وجدنا $f(x)=f(y)$ فإن f ثابتة على I .

2) من أجل دراسة رتابة f على مجال I: نعتبر x و y من I بحيث $x\neq y$ ونقوم بحساب معدل التغيير $T(x;y)=\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ ونقوم بدراسة إشارة $T(x,y)$ (بتأطيره مثلا).

*) إذا وجدنا $T(x,y)\ge 0$ $(T(x,y)\rangle 0)$ فإن f تزايدية (قطعا) على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)\le 0$ $(T(x,y)\langle 0)$ فإن f تناقصية (قطعا) على I .

*) إذا وجدنا $T(x,y)=0$ فإن f ثابتة على I .

3) نقول إن f رتيبة على I إذا كانت تزايدية أو تناقصية على I .

4)a) لتكن f دالة زوجية.

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تناقصية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تزايدية على $-I$.

b) لتكن f دالة فردية.

*) إذا كانت f تزايدية على I فإن f تزايدية على $-I$.

*) إذا كانت f تناقصية على I فإن f تناقصية على $-I$.

c) إذا كان $I=[a,b]$ فإن $-I=[-b,-a]$.

III- مقارنة دالتين

1) a) نقول إن f موجبة على D وتكتب $f\ge 0$ إذا كان $f(x)\ge 0$ لكل x من D .

b) نقول إن f سالبة على D وتكتب $f\le 0$ إذا كان $f(x)\le 0$ لكل x من D .

ملاحظات: (التأويل الهندسي)

*) تكون $f\ge 0$ على D إذا وفقط إذا كان C_f فوق محور الأفاصيل.

*) تكون $f\ge 0$ على D إذا وفقط إذا كان C_f تحت محور الأفاصيل.

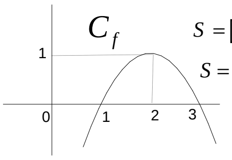
*) حلول المتراجحة $f(x)\ge 0$ هي اتحاد المجالات التي يكون فيها C_f فوق محور الأفاصيل.

*) حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ هي اتحاد المجالات التي يكون فيها C_f تحت محور الأفاصيل.

مثال: *) حلول المتراجحة $f(x)\ge 0$ هو $S=[1,3]$

*) حلول المتراجحة $f(x)\le 0$ $S=]-\infty,1]\cup[3,+\infty[$

*) حلول المتراجحة $f(x)\rangle 0$ $S=]1,3[$



2) نقول إن $f\le g$ على D إذا وفقط إذا كان $f(x)\le g(x)$ لكل x من D .

ملاحظات: (التأويل الهندسي)

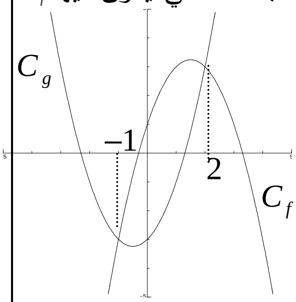
*) تكون $f\le g$ إذا وفقط إذا كان C_f تحت C_g .

*) حلول المتراجحة $f(x)\le g(x)$ هي المجالات التي يكون فيها C_f تحت C_g .

مثال: *) حلول المتراجحة $f(x)\ge g(x)$ هي : $S=[-1,2]$.

*) حلول المتراجحة $f(x)\le g(x)$ هي : $S=]-\infty,-1]\cup[2,+\infty[$.

*) حلول المتراجحة $f(x)>g(x)$ هي : $S=]-1,2[$



3) a) تقاطع C_f مع محور الأراتيب هي النقطة $A(0,f(0))$.

b)*) من أجل تحديد تقاطع C_f مع محور الأفاصيل نحل المعادلة $f(x)=0$ إذا كانت x_1 و x_2 ... هي الحلول فإن نقط تقاطع هي $A(x_1,0);B(x_2,0)$ ...

*) حلول المعادلة $f(x)=0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور الأفاصيل.

c) *) لكي نحدد تقاطع C_f و C_g نحل المعادلة $f(x)=g(x)$ وإذا كانت x_1 و x_2 .. هي الحلول فإن نقط تقاطع C_f و C_g هي $A(x_1,f(x_1)),B(x_2,f(x_2))$ ....

*) حلول المعادلة $f(x)=g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f و C_g .

IV- دالة مكبورة – دالة مصغورة

1) نقول إن f مكبورة على D إذا وُجد عدد M بحيث $f(x)\le M$ لكل x من D .

2) نقول إن f مصغورة على D إذا وُجد عدد m بحيث $f(x)\ge m$ لكل x من D .

3) نقول إن f محدودة على D إذا وُجد عدد m و M بحيث $m\le f(x)\le M$ لكل x من D .

ملاحظة: تكون f محدودة على D إذا وُجد عدد موجب M بحيث $|f(x)|\le M$ لكل x من D .

V- مطارف دالة

1) لكي نبين أن f تقبل قيمة قصوية مطلقة في x_0 نبين أن $f(x)\le f(x_0)$ لكل x من D_f . وتكون هذه القيمة القصوية هي $f(x_0)$.

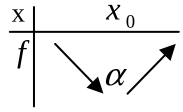
2) لكي نبين أن f تقبل قيمة دنوية مطلقة في x_0 نبين أن $f(x)\ge f(x_0)$ لكل x من D_f . وتكون هذه القيمة الدنوية هي $f(x_0)$.

3) لكي نبين أن α قيمة قصوية مطلقة ل f نبين أن $f(x) \le \alpha$ ونبحث عن x_0 بحيث $f(x_0)=\alpha$.

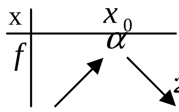
4) لكي نبين أن α قيمة دنوية مطلقة ل f نبين أن $f(x) \ge \alpha$ ونبحث عن x_0 بحيث $f(x_0)=\alpha$.

5) لكي نبين f تقبل قيمة قصوية نسبية عند x_0 نبين أنه يوجد مجال I يحتوي على x_0 بحيث $f(x) \le f(x_0)$ لكل $x \in I$. وتكون هذه القيمة القصوية هي $f(x_0)$. (تعريف مماثل بالنسبة لقيمة دنوية نسبية)

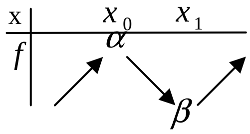
ملاحظة:



a) إذا كان جدول تغيرات f هو فإن α هي القيمة الدنوية المطلقة



b) إذا كان جدول تغيرات f هو فإن α هي القيمة القصوية المطلقة



c) إذا كان جدول تغيرات f هو فإن α هي قيمة قصوية نسبية و β قيمة دنوية نسبية.

VI- صور جزء من IR بدالة عددية

1) $f(D)=\{f(x)/x \in D\}$ يعني $f(D)$ هي المجموعة المكونة من صور جميع عناصر D .

2) $y \in f(D)$ يعني يوجد $x \in D$ بحيث $f(x)=y$.

3) لكي نبين أن $f(I)=J$ جبريا نبين ما يلي:

a) $f(I) \subset J$ ولهذا نأخذ $x \in I$ ونبين أن $f(x) \in J$.

b) $J \subset f(I)$ ولهذا نأخذ $y \in J$ ونبين أن $y \in f(I)$ ولهذا نبحث عن $x \in I$ بحيث $f(x)=y$.

VII- مركب دالتين

1) لتكن f و g دالتين بحيث $f(D_f) \subset D_g$ الدالة gof هي الدالة المعرفة على D_f بما يلي $(\forall x \in D_f)\, gof(x)=g(f(x))$.

2) a) من أجل تحديد حيز تعريف gof نتبع ما يلي: $x \in D_{gof} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$

b) لكي نبين أن $g \circ f$ معرفة على I نبين ما يلي: $\begin{cases} I \subset D_f \\ f(I) \subset D_g \end{cases}$

3) إذا كانت f و g تحققان ما يلي:

$\left.\begin{array}{l} \text{*) } f \text{ رتيبة على } I \\ \text{*) } f(I) \subset J \\ \text{*) } g \text{ رتيبة على } J \end{array}\right\}$ فإن $g \circ f$ رتيبة على I

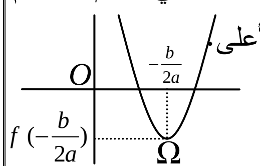
تكون $g \circ f$ تزايدية إذا كانت لـــ f و g نفس الرتابة.

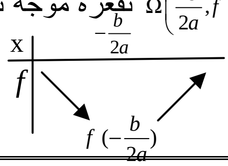
وتكون تناقصية إذا كانت لـــ f و g رتابتين مختلفتين

VIII- الدوال الاعتيادية

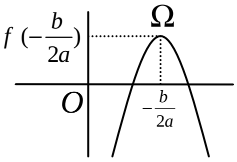
1) الدالة $\boxed{f(x)=ax^2+bx+c}$ $(a \ne 0)$

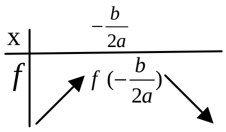
a) إذا كان $a>0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ تقعره موجه نحو الأعلى.





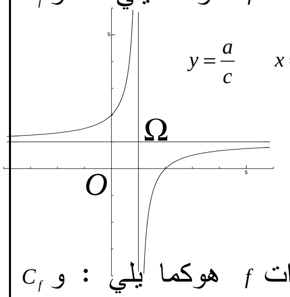
b) إذا كان $a<0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f شلجم رأسه $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ تقعره موجه نحو الأسفل.

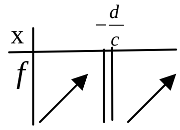




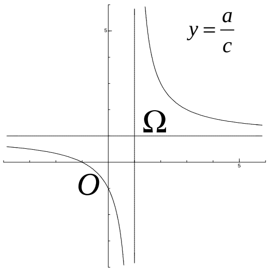
2) الدالة $\boxed{f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}}$ مع $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ $D_f=\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

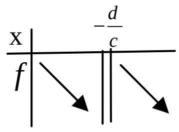
a) إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \rangle 0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ متقاربتاه $x=\frac{-d}{c}$ $y=\frac{a}{c}$





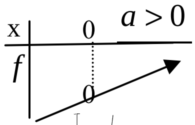
b) إذا كان $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \langle 0$ فإن جدول تغيرات f هوكما يلي : و C_f هذلول مركزه $\Omega\left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$ متقاربتاه $x=\frac{-d}{c}$ $y=\frac{a}{c}$

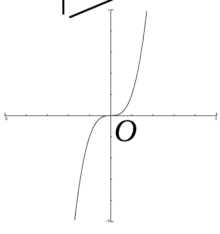




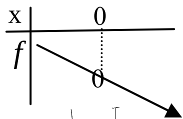
3) الدالة $\boxed{f(x)=ax^3}$

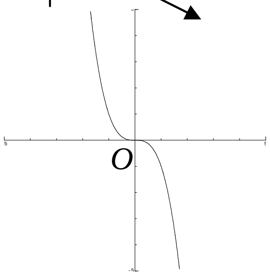
$a>0$





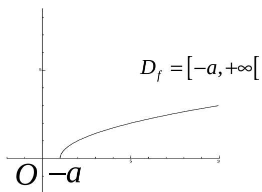
$a<0$

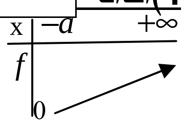




ملاحظة: بالنسبة ل $f(x)=ax^3+b$ نفس الشيء تصبح فقط $f(0)=b$

4) الدالة $\boxed{f(x)=\sqrt{x+a}}$ $D_f=[-a,+\infty[$





ملاحظة: بالنسبة ل $f(x)=\sqrt{x+a}+b$ نفس الشيء تصبح فقط $f(-a)=b$

5) a) نعتبر الدالة $g(x)=|f(x)|$. C_g مكون من جزء C_f الموجود فوق محور الأفاصيل. ومماثل جزء Cf الموجود تحت محور الأفاصيل بالنسبة لمحور الأفاصيل.

b) نعتبر الدالة $g(x)=f(|x|)$. C_g مكون من جزء C_f الموجود في $[0,+\infty[$ ومماثله بالنسبة لمحور الأراتيب.

6) حلول المعادلة $f(x)=m$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f و المستقيم $(\Delta): y=m$.