

## النهايات

نهاية لا منتهية لدالة عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$

▪ لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $[a, +\infty[$  حيث  $a \in \mathbb{R}$ .

إذا كان  $f(x)$  يؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

بنفس الطريقة يمكنك التعبير عن الحالات التالية:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

• لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$  لدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{زوجي} \\ -\infty & \text{فردى} \end{cases}$

نهاية منتهية لدالة عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$

▪ لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $[a, +\infty[$  حيث  $a \in \mathbb{R}$  وليكن  $l$  عددا حقيقيا.

إذا كان  $f(x)$  يؤول إلى العدد  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $+\infty$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ .

▪ لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $]-\infty, b]$  حيث  $b \in \mathbb{R}$  وليكن  $l'$  عددا حقيقيا.

إذا كان  $f(x)$  يؤول إلى العدد  $l'$  عندما يؤول  $x$  إلى  $-\infty$  فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l'$ .

$$n \in \mathbb{N}^*; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$n \in \mathbb{N}^*; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

لتكن  $f$  دالة عددية و  $l$  عددا حقيقيا.

▪ إذا كانت  $f$  تقبل نهاية  $l$  في  $+\infty$  (أو في  $-\infty$ ) فإن هذه النهاية وحيدة.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \text{ يكافئ } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l \text{ يكافئ } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - l) = 0$$

### النهايات المنتهية و اللامنتهية لدالة في نقطة

لتكن  $f$  دالة عددية و  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين بحيث  $f$  معرفة على مجال على الشكل  $]a - \alpha, a + \alpha[$  حيث  $\alpha \in \mathbb{R}_*^+$  أو على مجموعة على الشكل  $]a - \alpha, a + \alpha[ - \{a\}$   
إذا كان  $f(x)$  يؤول إلى العدد  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى العدد  $a$ ، فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

لتكن  $f$  دالة عددية و  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين.  
إذا كانت  $f$  تقبل نهاية  $l$  في  $a$ ، فإن هذه النهاية وحيدة.

•  $\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$  لكل  $n$  من  $\mathbb{N}^*$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$

لتكن  $f$  دالة عددية و  $a$  عددا حقيقيا.  
إذا كان  $f(x)$  يؤول إلى  $+\infty$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$ ، فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ .

### النهاية على اليمين و النهاية على اليسار لدالة في نقطة

لتكن  $f$  دالة عددية و  $a$  و  $l$  عددين حقيقيين.  
إذا كان  $f(x)$  يؤول إلى  $l$  عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين فإننا نكتب  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = l$  أو  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$   
إذا كان  $f(x)$  يؤول إلى  $+\infty$  (على التوالي إلى  $-\infty$ ) عندما يؤول  $x$  إلى  $a$  على اليمين فإننا نكتب  
 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  (على التوالي  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ )  
نعرف بنفس الطريقة النهاية على اليسار لدالة في نقطة.

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$

• إذا كان  $n$  زوجيا غير منعدم، فإن :

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

• إذا كان  $n$  فرديا غير منعدم، فإن :

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = -\infty$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$

•  $n \in \mathbb{N}^*$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$

لتكن  $f$  دالة عددية .

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$  يكافئ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$

العمليات على النهايات

$\lim f$	$l$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	$l$	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$l$	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l' \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

نهاية دالة حدودية - نهاية دالة جذرية

- لتكن  $P$  و  $Q$  دالتين حدوديتين و  $x_0$  عددا حقيقيا .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0) \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} \quad \blacksquare \text{ في حالة } Q(x_0) \neq 0$$

- و إذا كانت  $ax^n$  و  $bx^m$  هما على التوالي حديتي  $P$  و  $Q$  الأكبر درجة ، فإن :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} ax^n \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ax^n \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax^n}{bx^m} \quad \blacksquare$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n}{bx^m} \quad \blacksquare$$

### نهاية الدوال اللاجذرية

لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على مجال  $[a, +\infty[$  بحيث :  $(\forall x \in [a, +\infty[); f(x) \geq 0$

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  و  $l \geq 0$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = \sqrt{l}$

• إذا كان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  فإن :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{f(x)} = +\infty$

هذه الخاصية تبقى صالحة إذا كان  $x$  يؤول إلى  $-\infty$  أو إلى  $a$  أو إلى  $a$  على اليمين أو إلى  $a$  على اليسار

### نهايات الدوال المثلثية

▪  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$     ▪  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$     ▪  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

▪ لكل  $a$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :  $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$     ▪ لكل  $a$  من  $\mathbb{R}^*$  :  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$

▪ لكل  $a$  من  $\mathbb{R}$  لدينا :  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$     ▪  $\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

▪ لكل  $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$  حيث  $k \in \mathbb{Z}$  :  $\lim_{x \rightarrow a} \tan x = \tan a$     ▪  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

### النهايات و الترتيب

ليكن  $I$  مجالا من النوع  $[a, +\infty[$  و  $l$  عددا حقيقيا و لتكن  $f$  و  $u$  و  $v$  دوال عددية معرفة على المجال  $I$ .

(1) إذا كان :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  فإن :  $\begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty \end{cases}$

(2) إذا كان :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  فإن :  $\begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \geq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = -\infty \end{cases}$

(3) إذا كان :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  فإن :  $\begin{cases} (\forall x \in I); |f(x) - l| \leq u(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \end{cases}$

(4) إذا كان :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (مبرهنة الدرك) فإن :  $\begin{cases} (\forall x \in I); u(x) \leq f(x) \leq v(x) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l \end{cases}$

تبقى هذه الخاصيات تبقى صالحة إذا كان  $x$  يؤول إلى  $-\infty$  أو إلى  $a$  أو إلى  $a$  على اليمين أو إلى  $a$  على اليسار