





### Exercice n°1 :(4pts)

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite numérique définie par :  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = \frac{54}{u_n + 3}$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

0.5 1.a. Calculer  $u_1$  et  $u_2$

0.5 1.b. Montrer par récurrence que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n \geq 0$

2. On pose pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $v_n = \frac{u_n - 6}{u_n + 9}$

0.25 2.a. Calculer  $v_0$

1 2.b. Montrer que  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite géométrique de raison  $-\frac{2}{3}$

0.5 2.c. Montrer que  $v_n = \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

0.5 2.d. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n = \frac{6 + 9v_n}{1 - v_n}$

0.5 3.a. Montrer que pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$  :  $u_n = \frac{6 + 9\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}$

0.25 3.b. Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

### Exercice n°2 :(2.5pts)

Un sac contient trois boules vertes, deux boules blanches et deux boules rouges. Les sept boules sont indiscernables au toucher. On tire simultanément et au hasard deux boules du sac.

On considère les événements suivants :

$A$  : « Les deux boules tirées sont de couleurs différentes »

$B$  : « L'une au moins des deux boules tirées est rouge »

1 1. Calculer  $p(\bar{A})$  puis déduire que  $p(A) = \frac{16}{21}$  ( $\bar{A}$  est l'événement contraire de  $A$ )

0.5 2. Montrer que  $p(B) = \frac{11}{21}$

0.5 3. Calculer  $p(A \cap B)$

0.5 4. Les événements  $A$  et  $B$  sont-ils indépendants ?

### Exercice n°3:(3pts)

1.5 1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes  $\mathbb{C}$  l'équation  $(E)$ :  $z^2 - 6z + 13 = 0$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points

$A, B$  et  $C$  d'affixes respectifs  $a = 1$ ,  $b = 3 + 2i$  et  $c = 3 - 2i$



- 1 2.a. Donner l'écriture trigonométrique de  $b-a$  et celle de  $c-a$   
 0.5 2.b. En déduire que le triangle  $ABC$  est isocèle rectangle en  $A$

### Exercice n°4:(2.5pts)

Dans l'espace muni d'un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ , on considère les points  $A(0;1;1)$ ,  $B(-1;1;2)$

et la droite  $(\Delta)$  de représentation paramétrique :  $(\Delta): \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 \\ z = 1 - t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

- 0.25 1. Déterminer un vecteur directeur de la droite  $(\Delta)$   
 0.25 2. Vérifier que  $B \in (\Delta)$   
 0.5 3.a. Montrer que les points  $O$ ,  $A$  et  $B$  ne sont pas alignés.  
 0.5 3.b. Montrer qu'une équation cartésienne du plan  $(OAB)$  est :  $x - y + z = 0$   
 4. Soit le point  $C(2;1;1)$   
 0.5 4.a. Montrer que :  $C \in (\Delta)$  et  $C \notin (OAB)$   
 0.5 4.b. En déduire que :  $(OAB) \cap (\Delta) = \{B\}$

### Exercice n°5:(8pts)

On considère la fonction numérique  $f$  de la variable réelle  $x$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

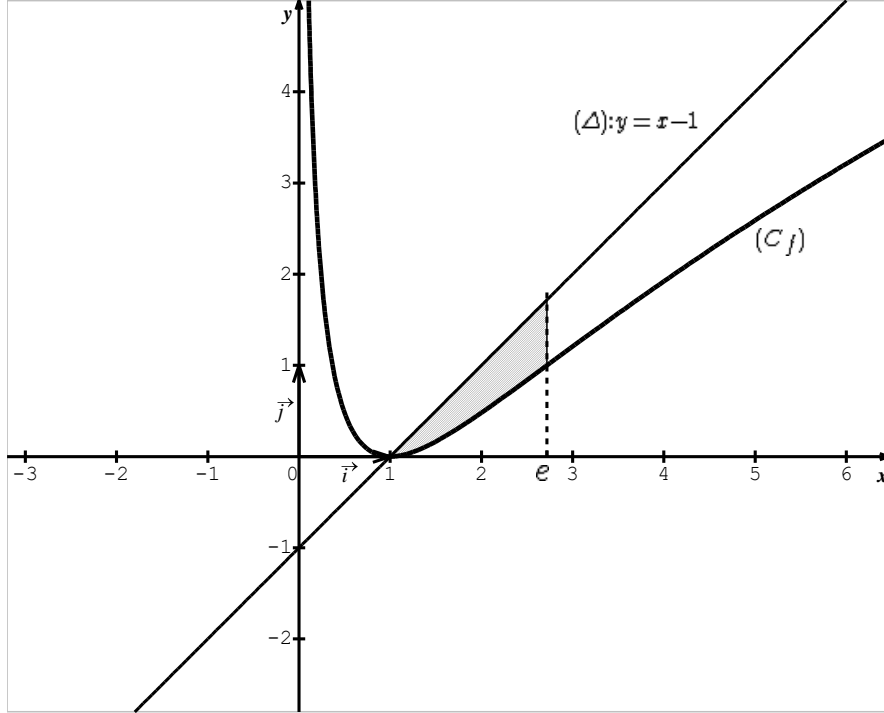
$$f(x) = (\ln x)^2$$

Soit  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  et  $(\Delta)$  la droite d'équation :  $y = x - 1$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$

- 0.75 1.a. Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x)$  et donner une interprétation géométrique du résultat.  
 0.5 1.b. Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$   
 0.5 2.a. Vérifier que pour tout  $x$  de  $]0; +\infty[$  :  $f'(x) = \frac{2}{x} \ln x$   
 1.25 2.b. Etudier le signe de  $f'(x)$  sur  $]0; +\infty[$   
 1 2.c. Calculer  $f(1)$  puis dresser le tableau de variations de  $f$   
 3. On considère l'inéquation  $(E)$ :  $(\ln x)^2 - (x-1) \leq 0$   
 0.25 Vérifier algébriquement que  $e$  est une solution de  $(E)$   
 4. Ci-dessous,  $(C_f)$  est la courbe représentative de  $f$  et  $(\Delta)$  la droite d'équation :  $y = x - 1$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$   
 0.75 4.a. Résoudre graphiquement l'inéquation  $(E)$ :  $(\ln x)^2 - (x-1) \leq 0$



- 1 4.b. En utilisant une intégration par parties, montrer que  $\int_1^e \ln x dx = 1$
- 1 4.c. En déduire en utilisant une intégration par parties que  $\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$
- 1 4.d. Calculer l'aire de la partie hachurée.







3	$p(A \cap B) = \frac{10}{21}$	0.5	0.5	
4	$A$ et $B$ ne sont pas indépendants car $p(A \cap B) \neq p(A) \times p(B)$	0.5	0.5	Accorder 0.25 pour la justification

### Exercice n°3:(3pts)

1	Les solutions de l'équation (E): $z^2 - 6z + 13 = 0$ sont : $3 + 2i$ et $3 - 2i$	0.5x3	1.5	Dont 0.5 pour le calcul du discriminant Accorder la note entière pour toute autre méthode correcte
2.a	$b - a = \left[ 2\sqrt{2}; \frac{\pi}{4} \right]$ et $c - a = \left[ 2\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$	0.5+0.5	1	
2.b	$ABC$ est isocèle rectangle en $A$	2x0.25	0.5	

### Exercice n°4:(2.5pts)

Questions	Détails d'éléments de réponses et barème	Notes partielles	Total	Observations
1	$\vec{u}(3; 0; -1)$ par exemple	0.25	0.25	Ou tout autre vecteur directeur non nul lié à $\vec{u}$
2	$B \in (\Delta)$	0.25	0.25	
3.a	Les points $O$ , $A$ et $B$ ne sont pas alignés.	0.5	0.5	
3.b	Une équation cartésienne du plan $(OAB)$ est : $x - y + z = 0$	0.5	0.5	Accepter toute réponse correcte
4.a	$C \in (\Delta)$ et $C \notin (OAB)$	0.25+0.25	0.5	
4.b	$(OAB) \cap (\Delta) = \{B\}$	0.5	0.5	

### Exercice n°5:(8pts)

	On considère la fonction numérique $f$ de la variable réelle $x$ définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = (\ln x)^2$			
Questions	Détail des éléments de réponses et barème	Notes partielles	Total	Observations
1.a	$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$	0.5	0.75	0.25 Pour la justification
	L'interprétation géométrique du résultat.	0.25		
1.b	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$	0.5	0.5	0.25 Pour la justification
2.a	Pour tout $x$ de $]0; +\infty[$ : $f'(x) = \frac{2}{x} \ln x$	0.5	0.5	
2.b	L'étude du signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$	1.25	1.25	
2.c	$f(1) = 0$	0.25	1	
	Le tableau de variations de la fonction $f$	0.75		



3	$e$ est une solution de (E): $(\ln x)^2 - (x-1) \leq 0$	0.25	0.25	
4.a	L'ensemble des solutions de (E) est : $S = [1; +\infty[$	0.75	0.75	
4.b	$\int_1^e \ln x dx = 1$	1	1	
4.c	$\int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$	1	1	
4.d	L'aire de la partie hachurée est $\left(\frac{e^2 - 4e + 5}{2}\right) u.a$	1	1	