

مباراة ولوج السنة الأولى للمدرسة الوطنية للفلاحة

مكناس

مادة الرياضيات

مدة الانجاز: ساعة واحدة

05 غشت 2011

أجب بتركيز عن كل سؤال في الحيز المخصص له

التمرين الأول: (5 نقط)

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}; u_{n+1} = u_n^2 + 1 \\ u_0 = -1 \end{cases}$$

لتكن  $(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة بما يلي:

1. ادرس رتبة المتتالية  $(u_n)$  واستنتج أنها مصغرة.

2. حل المتتالية  $(u_n)$  مقارنة؟ هل هي مكبورة؟

3. بين أن:  $\forall n \in \mathbb{N}^* u_n \geq 2^n$  واستنتج نهاية المتتالية  $(u_n)$  عندما يؤول  $n$  إلى  $+\infty$ .

التمرين الثاني: (4 نقط)

في  $\mathbb{C}$ ، مجموعة الأعداد العقدية تعتبر المعادلة التالية:  $(E) : z^2 + z + 1 = 0$  ونرمز بـ  $z_1$  و  $z_2$  لحلي المعادلة  $(E)$ . في المستوى المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر  $(O; \vec{u}; \vec{v})$  نعتبر النقاط  $A$  و  $B$  و  $C$  و  $D$  التي أحاقها على التوالي  $z_1$  و  $z_2$  و  $1$  و  $-1$ . بدون حل المعادلة  $(E)$  أجب عن الأسئلة التالية:

(1) بين أن النقطتين  $A$  و  $B$  متماثلتان بالنسبة لمحور الأضلاع.

(2) بين أن  $O$  مركز ثقل المثلث  $ABC$ .

(3) بين أن المثلث  $ABC$  متساوي الأضلاع.

(4) بين أن الرباعي  $OADB$  معين.

التصمين الثالث: (7 نقط)

نعتبر الدالة العددية  $g$  المعرفة على  $]-1; +\infty[$  بما يلي:  $g(x) = \frac{x}{1+x} + \ln(1+x)$ .  
 1) ضع جدول تغيرات الدالة  $g$ .

	-1	$+\infty$
$g'(x) =$		
$g(x)$		

2) حدد إشارة الدالة  $g$  على المجال  $]-1; +\infty[$ .

3) لتكن  $f$  الدالة العددية المعرفة على  $]-1; +\infty[$  بما يلي:  $f(x) = x \ln(1+x)$ .  
 1.3) ضع جدول تغيرات الدالة  $f$ .

	-1	$+\infty$
$f'(x) =$		
$f(x)$		

2.3) بين أن لكل  $x$  من المجال  $[0; 1]$ :  $\frac{x^2}{2} \leq f(x) \leq x^2$

1.4) بين أن المعادلة  $f(x) = \frac{1}{n}$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha_n$  على  $[0; 1]$ ، حيث  $n \in \mathbb{N}$  و  $n \geq 2$ .

2.4) بين أن المتتالية  $(\alpha_n)_{n \geq 2}$  متقاربة ثم حدد نهايتها. (يمكن استعمال السؤال 2.3)

التصمين الرابع: (4 نقط)

لكل عدد صحيح طبيعي  $n$  نضع:  $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x dx$  و  $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x dx$ .  
 1. باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن لكل عدد صحيح طبيعي  $n$ :

$$J_n - nI_n = e^{-\frac{n\pi}{2}} \quad \text{و} \quad I_n + nJ_n = 1$$

2. استنتج صيغة  $I_n$  و  $J_n$  بدلالة  $n$ .

$$J_n =$$

$$I_n =$$