

Concours d'entrée en 1ère année du cycle préparatoire

Epreuve de mathématiques :

(Durée:1h15min)

- La documentation, les calculatrices et les téléphones portables sont interdits
- Parmi les réponses proposées elle n'y en a qu'une qui est juste
- **Règles de notation :**
- Réponse Juste= **1 point** ; Réponse fausse= **-1 point** ; Pas réponse= **0 points**
- Plus qu'une case cochée= **-1 point**

**Exercice n° 1**

1.  $\int_k^2 \text{Ln}\left(\frac{x-1}{x}\right) dx = -2\ln 2 + \ln(k-1)$  où  $k \in ]1;2[$
2.  $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^3 x dx = \frac{3\sqrt{3}}{11}$
3.  $\int_{-2}^0 \left(|x+1| + \frac{4}{x-1}\right) dx = 1 - 4\ln 3$
4.  $\int_0^2 (x-2)e^{2x+1} dx = \frac{5}{4}e - \frac{13}{7}e^5$

**Exercice n° 2**

Pour tout réel  $x$ , on pose  $G(x) = \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$

1. G est une fonction paire
2. G est croissante sur  $\left[0; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$
3. G est croissante sur  $\left[\frac{1}{\sqrt{2}}; +\infty\right[$
4.  $\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1$

### Exercice n° 3

Une grandeur  $y$  décroît au cours du temps  $t$  selon la loi  $y(t) = y_0 2^{-t}$ , où  $y_0$  désigne la valeur initiale en  $t = 0$ .

La valeur moyenne de  $y$  entre les instants 0 et T.

1.  $(1 - 2^{-T})$
2.  $T \ln 2$
3.  $\frac{y_0}{\ln 2} (1 - 2^{-T})$
4.  $\frac{y_0}{T \ln 2} (1 - 2^{-T})$

### Exercice n° 4

Soit la fonction  $f(x) = \ln|e^x - e^{2x}|$

1. La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 0[$
2. La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0; \frac{1}{2}[$
3.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
4. La droite d'équation  $y = 3x$  est asymptote à la courbe C représentative de  $f$  quand  $x \rightarrow +\infty$

### Exercice n° 5

En quel(s) point(s) la courbe  $y = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{2}{x}}$  admet-elle une tangente parallèle à l'axe des abscisses?

1. aucun
2. (2; 3)
3.  $(1; 2\sqrt{2})$
4. (8; 6)

### Exercice n° 6

Soit la fonction  $f(x) = \frac{x^2}{x-1} e^{\frac{1}{x}}$

1. La droite d'équation  $y = x + 2$  est asymptote oblique à la courbe C représentative de  $f$  quand  $x \rightarrow +\infty$
2. La fonction  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty; 0[$
3.  $f$  est impaire
4. La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]1; +\infty[$

### Exercice n° 7

La contraposée de la proposition suivante:  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y \Rightarrow f(x) = f(y)$

1.  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$  ou  $x \leq y$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) \neq f(y) \Rightarrow x \leq y$
3.  $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$  et  $x \leq y$
4.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x > y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$

### Exercice n° 8

La négation de la proposition suivante:  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}, a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$

1.  $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R} / (a \leq b \Rightarrow f(a) \geq f(b))$
2.  $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} / (a \leq b$  ou  $f(a) < f(b))$  ;
3.  $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} / (a \leq b$  et  $f(a) < f(b))$  ;
4.  $\exists a \in \mathbb{R}, \exists b \in \mathbb{R} / (a > b$  et  $f(a) < f(b))$

### Exercice n° 9

On considère la suite  $(U_n)$  définie par : 
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1 + u_n) \end{cases}$$

1.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 0$
2. la suite  $(U_n)$  est strictement croissante
3. la suite  $(U_n)$  est décroissante
4.  $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 1$

### Exercice n° 10

L'ensemble S des solutions réelles du système suivant : 
$$\begin{cases} 2^{\frac{1}{x}} 2^{\frac{1}{y}} = 32 \\ 2^x 2^y = \sqrt[5]{32} \end{cases}$$

1.  $S = \left\{ \left( \frac{1}{3}; \frac{1}{2} \right); \left( \frac{1}{2}; \frac{1}{3} \right) \right\}$
2.  $S = \left( \frac{1}{5}; \frac{1}{3} \right)$
3.  $S = \left\{ \left( \frac{1}{5}; \frac{2}{3} \right); \left( \frac{3}{4}; \frac{1}{2} \right) \right\}$
4.  $S = \left\{ \left( \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right); \left( \frac{1}{4}; \frac{3}{5} \right) \right\}$

### **Exercice n° 11**

En effectuant une division, déterminer les paramètres  $a$  et  $b$  pour que le polynôme

$$A = x^3 + ax + b \text{ soit divisible par } B = x^2 - 3x + 2$$

1.  $a = 4$  et  $b = 2$
2.  $a = 7$  et  $b = 2$
3.  $a = 6$  et  $b = -3$
4.  $a = -7$  et  $b = 6$

### **Exercice n° 12**

Deux tireurs A et B font feu simultanément sur une cible. La probabilité pour A de toucher la cible est estimée à  $\frac{4}{5}$  ; la probabilité pour B est de  $\frac{3}{4}$  .

La probabilité que la cible soit atteinte est :

1.  $\frac{7}{20}$
2.  $\frac{19}{20}$
3.  $\frac{12}{20}$
4.  $\frac{1}{20}$

### **Exercice n° 13**

Une urne contient  $y$  boules dont 3 sont blanches, les autres étant rouges.

A l'occasion du tirage, sans remise, de deux boules, la probabilité d'obtenir une boule blanche puis une boule rouge est égale à  $\frac{1}{4}$  . Calculer  $y$  :

1.  $y = 8$
2.  $y = 12$
3.  $y = 4$  et  $y = 9$
4.  $y = 12$  et  $y = 8$

### **Exercice n° 14**

De combien de manières différentes un professeur peut-il choisir un ou plusieurs élèves parmi 6 ?

1. 55
2. 6
3. 63
4. 48

### **Exercice n° 15**

Le prix d'un article a subi trois baisses successives de 20%. De quel pourcentage ce prix a-t-il diminué au total ?

1. 60 %
2. 48,8%
3. 44,6%
4. 52,5%





11) a)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$       b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 1$       c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 2$

12) a)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1$       b)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$       c)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = +\infty$

13) a)  $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$       b)  $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$       c)  $\tan(a+b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$

14) a)  $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 + \tan(a)\tan(b)}$       b)  $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) + \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$       c)  $\tan(a-b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

15) La dérivée première de  $\arctan 3x^2$  est:

a)  $\frac{6x}{1-9x^4}$       b)  $\frac{6x}{1+x^4}$       c)  $\frac{6x}{1-9x^4}$

16) Pour calculer la dérivée première de la fonction  $y = (x^2 + 2)^2(1 - x^3)^3$ , on utilise la dérivation logarithmique et on obtient:

a)  $y' = 6x(x^2 + 2)^2(1 - x^3)^3(1 - 4x - 3x^3)$   
 b)  $y' = 6x(x^2 + 2)^2(1 - x^3)^3(1 - 4x - 3x^2)$   
 c)  $y' = x(x^2 + 2)^2(1 - x^3)^3(1 - 4x - 3x^3)$

17) Soit  $f(x) = \frac{2}{1-x}$ . Alors  $f^{(n)}(x) =$   
 a)  $2(n!) (1-x)^{-n}$       b)  $2(n!) (1-x)^{-(n+1)}$       c)  $(n!) (1-x)^{-(n+1)}$

18) Trouver  $y'$  à partir de l'équation  $xy + x - 2y - 1 = 0$ :  
 a)  $y' = \frac{1+y}{1-x}$       b)  $y' = \frac{1+y}{2-x}$       c)  $y' = \frac{1+y}{2+x}$

19) Evaluation de l'intégrale  $I = \int \sin^2 x dx$ :

a)  $I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C, C$  constante.  
 b)  $I = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin 2x + C, C$  constante.  
 c)  $I = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C, C$  constante.

20) Evaluation de l'intégrale  $I = \int \frac{dx}{x^2-4}$ :

a)  $I = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C, C$  constante.  
 b)  $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C, C$  constante.  
 c)  $I = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C, C$  constante.

21) a)  $\sum_{k=1}^n k = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$       b)  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n-1)}{2}$       c)  $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$

22) a)  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$       b)  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{(n+1)(2n-1)}{3}$       c)  $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n-1)}{6}$

23) a)  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$       b)  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^3$       c)  $\sum_{k=1}^n k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

24) L'aire  $I$ , de la région délimitée par la courbe  $y=x^2$ , la droite  $y = -x/2$  et la droite  $x=3$ , est:

a)  $I = 45,4$       b)  $I = 45$       c)  $I = 45$

25) Le nombre d'Euler  $e$  correspond à:

a)  $e = 2,71628$       b)  $e = 2,717828$       c)  $e = 2,71828$