

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

Mardi 22/07/08 - Durée : 3h 03mn

- N.B.** * La rédaction peut être en français ou en arabe
* La rigueur du raisonnement, la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation seront des éléments importants d'appréciation de la copie.

Exercice I , Barème : 10 Pts (chaque question est notée sur 2Pts) ||

- Q1.1** Résoudre le système des équations linéaires suivant : $x + 2y + 3z = 0$, $3x + y + 2z = 1$ et $2x + 3y + z = 2$
- Q1.2** Soit A , B et C trois ensembles non vide et on suppose que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Que peut-on dire de B et C ? (avec justification)
- Q1.3** Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on considère les points A , B et C de coordonnées respectives $(-1, 0)$, $(2, 4)$ et $(3, 3)$. Calculer l'aire du triangle ABC .
- Q1.4** On considère l'énoncé \mathcal{P} : " Si le carreau est vert alors il est en marbre ". Donner la négation de \mathcal{P} .
- Q1.5** Soit $x \in \mathbb{R}$ et on considère l'équation : $x^2 + 1 = 0$. Nous pouvons encore l'écrire : $(x + 1)^2 - 2x = 0$ ou $(x + 1)^2 = 2x$. Comme un carré est toujours positif ou nul, on en déduit : $x \geq 0$. Mais notre équation de départ peut également s'écrire : $(x - 1)^2 + 2x = 0$ ou $2x = -(x - 1)^2$. Comme un carré est toujours positif ou nul, on en déduit : $x \leq 0$. On a vu que $x \geq 0$ et $x \leq 0$, donc $x = 0$. Pourtant 0 ne vérifie pas l'équation de départ. Où est l'erreur ? (avec explication)

Exercice II , Barème : 10 Pts (chaque question est notée sur 2Pts) ||

- Q2.1** Calculer $\int_0^{100} E(x) dx$
- Q2.2** Soit f une fonction dérivable et sa dérivée est continue sur $[a, b]$ avec $a < b$. On suppose que $\int_a^b f^4(x) dx = \int_a^b f^3(x) dx = \int_a^b f^2(x) dx$, montrer que f est constante sur $[a, b]$. (N.B. $f^2(x) = f(x)f(x)$)
- Q2.3** Soit f la fonction définie pour $x \neq 1$ par $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{|x-1|(x-1)^p}$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Quelle valeur faut-il donner à $f(1)$ pour rendre f continue en 1 ?
- Q2.4** Une petite fille compte sur ses doigts : 1 sur le pouce, 2 sur l'index, 3 sur le majeur, 4 sur l'annulaire, 5 sur l'auriculaire, 6 sur l'annulaire, 7 sur le majeur, 8 sur l'index, 9 sur le pouce et ainsi de suite ... Son père lui demande ce qu'elle fait. " Je veux savoir sur quel doigt tombera 9999 " répond-elle. Pouvez-vous lui donner la réponse ?
- Q2.5** Il y a un an, Youssef avait l'âge " à l'envers " de sa mère (les mêmes chiffres lus dans l'autre sens). L'an prochain, Youssef aura l'âge " à l'envers de son père ". Cette année la somme des âges des parents est égale à 102. Quel est l'âge actuel de Youssef ?

Les réponses doivent figurer sur cette feuille de l'épreuve

|| Exercice III : QCM , Barème : 14Pts ||

Attention : Afin de pénaliser les réponses basées sur le hasard, l'exercice est noté en entier de la manière suivante : Notons par n et m respectivement le nombre de réponses justes et fausses. La note attribuée à l'exercice sera :

$$\begin{array}{r} n + 2 \quad \text{si } n \geq 10 \\ n \quad \text{si } m < 5 \\ 0 \quad \text{si } m \geq 5 \end{array}$$

“ La vie est complexe car nous avons tous une partie réelle et une partie imaginaire ”

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V ou F
Q3.01 : $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}, x = yz$	
Q3.02 : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N}, x = yz$	
Q3.03 : Sept cars (identiques) pleins aux deux tiers partent de Meknès à Fès, un quart des touristes descend de chaque car. Les trois quarts des touristes restants sont rassemblés dans trois cars.	
Q3.04 : Le produit de deux fonctions négatives décroissantes est une fonction croissante	
Q3.05 : Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $]a, +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	
Q3.06 : Une fonction ni continue ni monotone peut être bijective	
Q3.07 : Soient les fonctions $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \frac{x+1}{x-1}$, on note par $\mathcal{D}_{u \circ v}$ et $\mathcal{D}_{v \circ u}$ les ensembles de définition respectifs de $u \circ v$ et $v \circ u$. On a $\mathcal{D}_{u \circ v} = \mathcal{D}_{v \circ u}$	
Q3.08 : On note F l'ensemble des applications f continues de \mathbb{R} dans \mathbb{R} vérifiant $\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 & f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$ La fonction $x \mapsto 2^{-x^2}$ appartient F	
Q3.09 : La fonction $f : x \mapsto x - 1 + \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ si $x \neq 1$ et telle que $f(1) = 1$ admet une tangente en tout point de \mathbb{R}	
Q3.10 : On considère $I_1 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x} dx$ et $I_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx$, on a $I_1 = I_2$	
Q3.11 : L'équation $10x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$	
Q3.12 : La fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -(x^2 + 3x + 1)e^x$ est une solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$	

Exercice IV : Questions à réponse précise, Barème : 12Pts

Répondre dans la colonne réponse		
Barème	Question	Réponse
2Pts	<p>Q4.01 : Citer parmi les propositions A, B, C et D celles qui sont équivalentes ?</p> $\begin{cases} A : (P \implies Q) \implies R \\ B : (P \text{ et } Q) \implies R \\ C : P \implies (Q \implies R) \\ D : (P \implies R) \text{ et } (Q \implies R) \end{cases}$	
1Pt	<p>Q4.02 : Soit $f : x \mapsto f(x)$ une fonction deux fois dérivable sur $] -1, 1[$ et soit la fonction $F : x \mapsto f(\sin t)$ définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Déterminer la dérivée seconde de F.</p>	
1Pt	<p>Q4.03 : Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x$</p>	
2Pts	<p>Q4.04 : On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$.</p> <p>a) Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E.</p> <p>b) Soient $A = \{a, b, d, f\}$ un des sous-ensembles de E, calculer le nombre d'applications de E dans A.</p>	
0Pt	<p>Q4.05 : Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par :</p> $g(x) = (x+1) \ln(x+1) - (x-1) \ln(x-1)$ <p>Calculer $g'(x)$</p>	
1Pt	<p>Q4.06 : Calculer l'intégrale $\int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$</p>	
2Pts	<p>Q4.07 : Déterminer l'ensemble $f(I)$ dans les cas suivants :</p> <p>a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ et $I =]0, 1[$</p> <p>b) $f(x) = \sin x$ et $I =]0, \pi]$</p>	
1Pt	<p>Q4.08 : Soit A le point de coordonnées $(1, -2)$ et \mathcal{D} la droite d'équation $3x + 4y - 1 = 0$. Calculer la distance de A à \mathcal{D}.</p>	
1Pt	<p>Q4.09 : Calculer la partie réelle et imaginaire du complexe $(1 + i\sqrt{3})^9$</p>	
1Pt	<p>Q4.10 : Au fond d'un puits de $12 m$ se trouve un escargot. Pendant la journée, il grimpe de $3 m$. Mais chaque nuit, il glisse de $2 m$. Il commence son ascension le 1er juin à 8 heures. Quel jour et quelle heure sortira-t-il du puits ?</p>	