

**CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année**

Filière : Sciences Mathématiques A et B

**Epreuve de Mathématiques**

Mardi 22/07/08 - Durée : 3h 03mn

- N.B.** \* La rédaction peut être en français ou en arabe  
\* La rigueur du raisonnement, la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation seront des éléments importants d'appréciation de la copie.

**Exercice I , Barème : 10 Pts (chaque question est notée sur 2Pts) ||**

- Q1.1** Résoudre le système des équations linéaires suivant :  $x + 2y + 3z = 0$ ,  $3x + y + 2z = 1$  et  $2x + 3y + z = 2$
- Q1.2** Soit  $A$ ,  $B$  et  $C$  trois ensembles non vide et on suppose que  $A \cap B = A \cap C$  et  $A \cup B = A \cup C$ . Que peut-on dire de  $B$  et  $C$  ? (avec justification)
- Q1.3** Dans le plan rapporté à un repère orthogonal, on considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  de coordonnées respectives  $(-1, 0)$ ,  $(2, 4)$  et  $(3, 3)$ . Calculer l'aire du triangle  $ABC$ .
- Q1.4** On considère l'énoncé  $\mathcal{P}$  : " Si le carreau est vert alors il est en marbre ". Donner la négation de  $\mathcal{P}$ .
- Q1.5** Soit  $x \in \mathbb{R}$  et on considère l'équation :  $x^2 + 1 = 0$ . Nous pouvons encore l'écrire :  $(x + 1)^2 - 2x = 0$  ou  $(x + 1)^2 = 2x$ . Comme un carré est toujours positif ou nul, on en déduit :  $x \geq 0$ . Mais notre équation de départ peut également s'écrire :  $(x - 1)^2 + 2x = 0$  ou  $2x = -(x - 1)^2$ . Comme un carré est toujours positif ou nul, on en déduit :  $x \leq 0$ . On a vu que  $x \geq 0$  et  $x \leq 0$ , donc  $x = 0$ . Pourtant 0 ne vérifie pas l'équation de départ. Où est l'erreur ? (avec explication)

**Exercice II , Barème : 10 Pts (chaque question est notée sur 2Pts) ||**

- Q2.1** Calculer  $\int_0^{100} E(x) dx$
- Q2.2** Soit  $f$  une fonction dérivable et sa dérivée est continue sur  $[a, b]$  avec  $a < b$ . On suppose que  $\int_a^b f^4(x) dx = \int_a^b f^3(x) dx = \int_a^b f^2(x) dx$ , montrer que  $f$  est constante sur  $[a, b]$ . (N.B.  $f^2(x) = f(x)f(x)$ )
- Q2.3** Soit  $f$  la fonction définie pour  $x \neq 1$  par  $f(x) = \frac{\sin(x-1)}{|x-1|(x-1)^p}$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ . Quelle valeur faut-il donner à  $f(1)$  pour rendre  $f$  continue en 1 ?
- Q2.4** Une petite fille compte sur ses doigts : 1 sur le pouce, 2 sur l'index, 3 sur le majeur, 4 sur l'annulaire, 5 sur l'auriculaire, 6 sur l'annulaire, 7 sur le majeur, 8 sur l'index, 9 sur le pouce et ainsi de suite ... Son père lui demande ce qu'elle fait. " Je veux savoir sur quel doigt tombera 9999 " répond-elle. Pouvez-vous lui donner la réponse ?
- Q2.5** Il y a un an, Youssef avait l'âge " à l'envers " de sa mère (les mêmes chiffres lus dans l'autre sens). L'an prochain, Youssef aura l'âge " à l'envers de son père ". Cette année la somme des âges des parents est égale à 102. Quel est l'âge actuel de Youssef ?

Les réponses doivent figurer sur cette feuille de l'épreuve

|| Exercice III : QCM , Barème : 14Pts ||

**Attention :** Afin de pénaliser les réponses basées sur le hasard, l'exercice est noté en entier de la manière suivante : Notons par  $n$  et  $m$  respectivement le nombre de réponses justes et fausses. La note attribuée à l'exercice sera :

$$\begin{array}{r} n + 2 \quad \text{si } n \geq 10 \\ n \quad \text{si } m < 5 \\ 0 \quad \text{si } m \geq 5 \end{array}$$

“ La vie est complexe car nous avons tous une partie réelle et une partie imaginaire ”

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V ou F
<b>Q3.01 :</b> $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}, x = yz$	
<b>Q3.02 :</b> $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N}, x = yz$	
<b>Q3.03 :</b> Sept cars (identiques) pleins aux deux tiers partent de Meknès à Fès, un quart des touristes descend de chaque car. Les trois quarts des touristes restants sont rassemblés dans trois cars.	
<b>Q3.04 :</b> Le produit de deux fonctions négatives décroissantes est une fonction croissante	
<b>Q3.05 :</b> Si $a$ est un nombre réel quelconque et $f$ une fonction définie et strictement décroissante sur $]a, +\infty[$ , alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	
<b>Q3.06 :</b> Une fonction ni continue ni monotone peut être bijective	
<b>Q3.07 :</b> Soient les fonctions $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \frac{x+1}{x-1}$ , on note par $\mathcal{D}_{u \circ v}$ et $\mathcal{D}_{v \circ u}$ les ensembles de définition respectifs de $u \circ v$ et $v \circ u$ . On a $\mathcal{D}_{u \circ v} = \mathcal{D}_{v \circ u}$	
<b>Q3.08 :</b> On note $F$ l'ensemble des applications $f$ continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 & f(x+y)f(x-y) = (f(x)f(y))^2 \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$ La fonction $x \mapsto 2^{-x^2}$ appartient $F$	
<b>Q3.09 :</b> La fonction $f : x \mapsto x - 1 + \frac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ si $x \neq 1$ et telle que $f(1) = 1$ admet une tangente en tout point de $\mathbb{R}$	
<b>Q3.10 :</b> On considère $I_1 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x} dx$ et $I_2 = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx$ , on a $I_1 = I_2$	
<b>Q3.11 :</b> L'équation $10x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$	
<b>Q3.12 :</b> La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -(x^2 + 3x + 1)e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x + 3)e^x$	

**Exercice IV : Questions à réponse précise, Barème : 12Pts**

Répondre dans la colonne réponse		
Barème	Question	Réponse
2Pts	<p><b>Q4.01 :</b> Citer parmi les propositions <math>A, B, C</math> et <math>D</math> celles qui sont équivalentes ?</p> $\begin{cases} A : (P \implies Q) \implies R \\ B : (P \text{ et } Q) \implies R \\ C : P \implies (Q \implies R) \\ D : (P \implies R) \text{ et } (Q \implies R) \end{cases}$	
1Pt	<p><b>Q4.02 :</b> Soit <math>f : x \mapsto f(x)</math> une fonction deux fois dérivable sur <math>] -1, 1[</math> et soit la fonction <math>F : x \mapsto f(\sin t)</math> définie sur <math>]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[</math>. Déterminer la dérivée seconde de <math>F</math>.</p>	
1Pt	<p><b>Q4.03 :</b> Calculer <math>\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} - x</math></p>	
2Pts	<p><b>Q4.04 :</b> On considère l'ensemble <math>E = \{a, b, c, d, e, f, g\}</math>.</p> <p>a) Déterminer le cardinal de l'ensemble <math>\mathcal{P}(E)</math> des parties de <math>E</math>.</p> <p>b) Soient <math>A = \{a, b, d, f\}</math> un des sous-ensembles de <math>E</math>, calculer le nombre d'applications de <math>E</math> dans <math>A</math>.</p>	
0Pt	<p><b>Q4.05 :</b> Soit <math>g</math> la fonction définie sur l'intervalle <math>]1, +\infty[</math> par :</p> $g(x) = (x+1) \ln(x+1) - (x-1) \ln(x-1)$ <p>Calculer <math>g'(x)</math></p>	
1Pt	<p><b>Q4.06 :</b> Calculer l'intégrale <math>\int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx</math></p>	
2Pts	<p><b>Q4.07 :</b> Déterminer l'ensemble <math>f(I)</math> dans les cas suivants :</p> <p>a) <math>f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}</math> et <math>I = ]0, 1[</math></p> <p>b) <math>f(x) = \sin x</math> et <math>I = ]0, \pi]</math></p>	
1Pt	<p><b>Q4.08 :</b> Soit <math>A</math> le point de coordonnées <math>(1, -2)</math> et <math>\mathcal{D}</math> la droite d'équation <math>3x + 4y - 1 = 0</math>. Calculer la distance de <math>A</math> à <math>\mathcal{D}</math>.</p>	
1Pt	<p><b>Q4.09 :</b> Calculer la partie réelle et imaginaire du complexe <math>(1 + i\sqrt{3})^9</math></p>	
1Pt	<p><b>Q4.10 :</b> Au fond d'un puits de <math>12\text{ m}</math> se trouve un escargot. Pendant la journée, il grimpe de <math>3\text{ m}</math>. Mais chaque nuit, il glisse de <math>2\text{ m}</math>. Il commence son ascension le 1er juin à 8 heures. Quel jour et quelle heure sortira-t-il du puits ?</p>	