Université Moulay Ismaïl

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filières : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

27/07/10 - Durée : 2h 37mn

N.B. * La rédaction peut être en français ou en arabe
* La rigueur du raisonnement, la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation seront des éléments importants d'appréciation de la copie.

Toutes les réponses doivent figurer sur les feuilles de l'épreuve

1. Soit $n \in \mathbb{Z}$, démontrer que $(\forall k \in \mathbb{Z}, n^2 \neq 5k) \Longrightarrow (\forall l \in \mathbb{Z}, n \neq 5l)$. **(3Pts)**

2. Montrer que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) \leq x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ avec $E(.)$ est la partie entière **(3Pts)**

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $(2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$ est un entier pair. **(3Pts)**

4. Soit $z \in \mathbb{C}$, montrer que $|z-i| = |z+i|$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}$. **(3Pts)**

5. Montrer que $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est un irrationnel. **(3Pts)**

6. On considère les suites $(u_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ définies comme suit :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} v_0 = 5 \\ v_{n+1} = \sqrt{u_{n+1} v_n} \end{cases}$$

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq v_n$. **(3Pts)**

7. On considère trois ensembles A, B et C. Montrer que **(3Pts)**

$$(A \cup B \subset A \cup C \text{ et } A \cap B \subset A \cap C) \Longrightarrow B \subset C$$

8. Soit f une fonction strictement monotone, dérivable et à dérivée continue sur $[a, b]$. Montrer que **(3Pts)**

$$\int_a^b f(x)\,dx = bf(b) - af(a) - \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(x)\,dx$$

Questions à réponse précise, Partie I

Répondre dans la colonne réponse	
Question	**Réponse**
Définir à l'aide d'une valeur absolue les encadrements suivants : $x \in [-3,5]$ et $x \in [2,7]$ **(2Pts)**	
On considère la fonction $f(x) = \min(x^2, 3)$, donner $f(I\!R)$, $f([-1,1])$ et $f^{-1}([-1,4])$ **(3Pts)**	
Soit $x \in [-2,1]$ et $y \in [2{,}3]$, donner des encadrements des quantités suivantes : $x-y$, $-2x+y$ et xy **(3Pts)**	
Déterminer la valeur de $A = E(x)+E(-x)$ avec $E(.)$ est la partie entière **(2Pts)**	
A l'aide des quantificateurs, écrire les propositions suivantes et préciser celles qui sont vraies: (a) Aucun entier n'est supérieur à tous les autres. **(2Pts)** (b) Il existe un entier multiple de tous les autres. **(2Pts)** (c) Certains réels sont supérieurs à leurs carrés. **(2Pts)**	
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (a) $(\forall x \in I\!R,\ x < 0) \Longrightarrow (\sqrt{x^2} = -x)$. **(1Pt)** (b) $\exists x \in I\!R^*,\ \forall y \in I\!R^*,\ \forall z \in I\!R^*\ z = xy$. **(1Pt)** (c) $\forall x > 0,\ \forall n \in I\!N^*$ on a $\dfrac{1+nx}{\ln(nx)} \in I\!R$. **(1Pt)**	
$f(x) = \dfrac{x}{1+\lvert x\rvert}$ avec $x \in I\!R$, la fonction f est une bijection de $I\!R$ sur $]-1{,}1[$. Déterminer f^{-1}. **(2Pts)**	

Questions à réponse précise, Partie II

Répondre dans la colonne réponse	
Question	**Réponse**
Déterminer les réels a, b et c tels que pour tout réel $x \neq -1$, on a $\frac{x^2}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1}$ **(2Pts)**	
Calculer la dérivée de **(2Pts)** $g(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{\exp(2x)+1}{\exp(2x)+3}\right)\right)$	
On considère la fonction f définie par $f(x) = -x+7+6\ln(2x+1) - 6\ln(2x+2)$. sur $\left]\frac{-1}{2}, +\infty\right[$, étudier la position de la courbe (C_f) de f par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = -x+7$ **(1Pt)**	
Soit f :$[0, 1] \longrightarrow I\!R$ dérivable vérifiant $f(0) = f(1)$. On définit g sur $[0, 1]$ par $g(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ f(2x-1) & \text{si } \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$ Quelles hypothèses faut-il rajouter pour que g soit dérivable sur $[0, 1]$? **(2Pts)**	
Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx.$ **(2Pts)**	
Résoudre dans $I\!R$ l'équation : $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$. **(2Pts)**	
Soit p et q deux réels non nuls, on considère l'équation $x^2+px+q = 0$ (*). Trouver les valeurs de p et q pour lesquelles p et q sont solutions de l'équation (*). **(2Pts)**	
Eliminer 13 chiffres sur 21 de telle sorte que la somme des 8 chiffres restant soit égale à 41 $\begin{matrix} 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 \end{matrix}$ **(2Pts)**	