Université Moulay Ismaïl
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

Questions à réponse précise, Partie I

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (1Pt))

Questions	Réponses
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (a) Toute application injective d'un ensemble dans lui même est bijective (b) $\forall x > 1, \dfrac{x-1}{\ln(x-1)} \in \mathbb{R}$ (c) Soit A, B et C trois ensembles, on a $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ (d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0$ (e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel	
Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes : (a) La fonction f est constante sur $[0, 5]$ (b) La fonction g n'est pas injective sur l'ensemble E (c) La fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ (d) Tout réel possède une racine carré dans $\mathbb{R}$ (e) Etant donnés trois réels, il y en a au moins deux de même signe	

Questions à réponse précise, Partie II

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))	
Questions	**Réponses**
Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(x^2) = (x^2+1)\,P(x)$	
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $198x+216y=36$	
E, F et G étant trois ensembles finis exprimer $card(E\cup F\cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles E, F, G, $E\cap F$, $E\cap G$, $F\cap G$ et $E\cap F\cap G$	
Exprimer à l'aide d'intervalles de $\mathbb{R}$ l'ensemble suivant : $A=\{x\in\mathbb{R}\ /\ 2\leq \lvert x\rvert < 4\}$	
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples $+$, $-$, $*$ et $/$	
Calculer le nombre complexe $B=\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$	
Calculer $\alpha=\sum_{k=1}^{n}\dfrac{2^k+3^{k+2}}{5^{k+1}}$	
Calculer $\beta=\sum_{k=1}^{n}(2k+7)$	
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on contidère les points A, B et C de coordonnées : $A(2,4)$, $B(-2,1)$ et $C(4,3)$. On note d la distance du point A à la droite (BC). Donner la valeur de d.	
Calculer la limite de la suite dont le terme général est donné par : $u_1=\sqrt{2}$, $u_2=\sqrt{2\sqrt{2}}$, $u_3=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\cdots$	

Questions à réponse précise, Partie III

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur **(2Pts)**)	
Questions	Réponses
Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0,\, 2\pi[$ vérifiant l'équation : $(\sin x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$	
Résoudre dans $I\!R$ l'équation $\lvert E(x)\rvert = 3$ avec $E(x)$ est la partie entière de x	
Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+3x}}$	
Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ de la fonction f, définie sur $I\!R^*$ par $f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x}$	
Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f(x) = x\ln\lvert x+1\rvert$	
On considère, pour tout $n \in I\!N^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x}\,dx$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} avec $n > 1$	
Soit la fonction f définie sur $I = [0,\, 3]$ par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x \in]0,\, 2[\\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in]2,\, 3] \end{cases}$ Calculer $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ avec $x \in I$	
Calculer $\int t^3 \cos t^2\ dt$	
Déterminer la fonction f telle que $gof(x) = 2\lvert x\rvert$ sachant que g est la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	
Pour quelles valeurs de $\beta \in I\!R$, l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0,\, 1]$?	

Université Moulay Ismaïl
Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Mathématiques A et B

Epreuve de Mathématiques

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

Questions à réponse précise, Partie I

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (1Pt))

Questions	Réponses
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (a) Toute application injective d'un ensemble dans lui même est bijective (b) $\forall x > 1, \dfrac{x-1}{\ln(x-1)} \in I\!R$ (c) Soit A, B et C trois ensembles, on a $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ (d) $\forall x \in I\!R, x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0$ (e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel	a) fausse. $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto e^x$ est injective mais pas bijective, 0 n'a pas d'antécédant dans $\mathbb{R}$. b) fausse. $D_{\frac{x-1}{\ln(x-1)}} =]1,2[\cup]2,+\infty[$ c) fausse. $A = B = \mathbb{R}$, $C = \mathbb{R}^+$ $(A \cup B) \cap C = \mathbb{R}^+$ $\quad A \cup (B \cap C) = \mathbb{R}$ d) Vraie e) fausse, $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ sont irrationnels mais leur somme qui est nulle n'est pas irrationnel.
Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes : (a) La fonction f est constante sur $[0, 5]$ (b) La fonction g n'est pas injective sur l'ensemble E (c) La fonction h, définie sur $I\!R$, atteint toutes les valeurs de $I\!N$ (d) Tout réel possède une racine carré dans $I\!R$ (e) Etant donnés trois réels, il y en a au moins deux de même signe	1. La proposition se traduit par: $\exists K \in \mathbb{R}, \forall x \in [0,5] : f(x) = K$ 2. La proposition se traduit par: $\exists (a,b) \in E^2 / g(a) = g(b)$ et $a \neq b$ 3. La proposition se traduit par: $\forall x \in \mathbb{R} \quad h(x) \in \mathbb{N}$ 4. La proposition se traduit par: $\forall b \in \mathbb{R}, \exists a \in \mathbb{R} / b = a^2$ 5. La proposition se traduit par: $\forall (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 / ab \geqslant 0$ ou $bc \geqslant 0$ ou $ac \geqslant 0$

Questions à réponse précise, Partie III

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur **(2Pts)**)	
Questions	Réponses
Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0, 2\pi[$ vérifiant l'équation : $(\sin x)^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = 0$	$S = \left\{ \frac{7\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{12} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lvert E(x) \rvert = 3$ avec $E(x)$ est la partie entière de x	$S =]-4, -3] \cup [3, 4[$
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3+3x}}$	
Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{2e^x+1}{1-e^x}$	
Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f(x) = x \ln \lvert x+1 \rvert$	
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} avec $n > 1$	$I_{n+1} = \frac{e^2}{2} - \frac{n+1}{2} I_n$
Soit la fonction f définie sur $I = [0, 3]$ par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x \in]0, 2[\\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \frac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in]2, 3] \end{cases}$ Calculer $F(x) = \int_0^x f(x)\,dx$ avec $x \in I$	$F(x) = \frac{e^{x^2}-1}{2} + \ln \frac{1+x^2}{5}$
Calculer $\int t^3 \cos t^2 \, dt$	$\int t^3 \cos(t^2)\,dt = \frac{1}{2} t^2 \sin(t^2) + \frac{1}{2}\cos(t^2) + K$
Déterminer la fonction f telle que $g o f(x) = 2\lvert x \rvert$ sachant que g est la fonction définie par $g(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	$f(x) = \begin{cases} \ln(2\lvert x \rvert) & x \in]-\frac{1}{2}, 0[\cup]0, \frac{1}{2}[\\ 4x^2 - 1 \ ; & x \in]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[\end{cases}$
Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0, 1]$?	$\beta \in [0, 2]$

Questions à réponse précise, Partie II

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (2Pts))

Questions	Réponses
Déterminer l'ensemble des polynômes P tels que $P(x^2) = (x^2+1)P(x)$	$\mathcal{E} = \{a(x^2-1) / a \in \mathbb{R}\}$
Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation : $198x+216y=36$	$S = \{(-2+12k, 2-11k) / k \in \mathbb{Z}\}$
E, F et G étant trois ensembles finis exprimer $card(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles E, F, G, $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$ et $E \cap F \cap G$	$\text{Card}(E \cup F \cup G) = \text{Card}(E) + \text{Card}(F) + \text{Card}(G) - \text{Card}(E \cap F) - \text{Card}(E \cap G) - \text{Card}(F \cap G) + \text{Card}(E \cap F \cap G)$
Exprimer à l'aide d'intervalles de $\mathbb{R}$ l'ensemble suivant : $A = \{x \in \mathbb{R} / 2 \leq \|x\| < 4\}$	$A = [2,4] \cup [-4,-2]$
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples +, −, * et /	$6 \div (1 - 5 \div 7) = 6 \div \frac{2}{7} = 21$
Calculer le nombre complexe $B = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$	$B = \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]^{24} = \left[2^{12}, 14\pi\right] = 2^{12} = 4096$
Calculer $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$	$a = \frac{2}{15}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{27}{10}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$
Calculer $\beta = \sum_{k=1}^{n} (2k+7)$	$\beta = \sum_{k=1}^{n} (2k+7) = n(n+8)$
Dans le plan rapporté à un repère orthonormé, on contidère les points A, B et C de coordonnées : $A(2,4)$, $B(-2,1)$ et $C(4,3)$. On note d la distance du point A à la droite (BC). Donner la valeur de d.	$d = d(A,(BC)) = \frac{\|2-12+5\|}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{2}$
Calculer la limite de la suite dont le terme général est donné par : $u_1 = \sqrt{2}$, $u_2 = \sqrt{2\sqrt{2}}$, $u_3 = \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$, $\cdots$	$\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$