Université Moulay Ismaïl

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filière : Sciences Expérimentales et Techniques

Epreuve de Mathématiques

Mardi 22/07/08 - Durée : 3h 03mn

N.B. * La rédaction peut être en français ou en arabe
* La rigueur du raisonnement, la clarté de la rédaction et la qualité de la présentation seront des éléments importants d'appréciation de la copie.

Exercice I, Barème : 10 Pts (chaque question est notée sur 2Pts)

Q1.1 Calculer $\left(1+q+q^2+\cdots+q^n\right)(1-q)$

Q1.2 Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}$ par

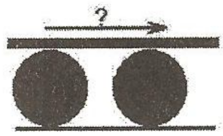
$$f(x)=\left(x^2-1\right)\ln\left(\left|\frac{1+x}{1-x}\right|\right)$$

Etudier la parité de la fonction f

Q1.3 Soit $x\in\mathbb{R}$, on note (E) : $e^{2x}-2me^{x}+1=0$. Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation (E) n'admet pas de racine réelle

Q1.4 Soit $u_n=\displaystyle\int_1^2\frac{(\ln t)^n}{t}dt$, avec $n\in\mathbb{N}$, la suite (u_n) est-elle monotone ?

Q1.5 Une planche est posée sur deux rondins de bois de 31, 83 cm de haut. De combien aura avancé la planche quand les rondins auront fait un tour ?



Exercice II , Barème : 10 Pts (chaque question est notée sur 2Pts)

Q2.1 Démontrer que : $\forall(a,b,c)\in\mathbb{R}^{+3}\ /\ a^2-c^2=b$ on a $\sqrt{a+\sqrt{b}}=\sqrt{\dfrac{a+c}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-c}{2}}$

Q2.2 On considère la fonction $f:x\longmapsto x^3$, montrer que

$$\forall x\in[-2,3],\ \forall y\in[-2,3]\ \text{on a}\ |f(x)-f(y)|\leq 27\,|x-y|$$

Q2.3 Etudier la limite quand x tend vers 1 de la fonction $f:x\longmapsto x+E(x)$ ($E(x)$ désignant la partie entière de x)

Q2.4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation suivante : $\sqrt{2(x+1)}>x$

Q2.5 On définit une suite par la donnée de la relation : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}-u_n-802=0$ et par son premier terme $u_0=2$. Calculer u_{19}

Les réponses doivent figurer sur cette feuille de l'épreuve

Exercice III : QCM , Barème : 14Pts

Attention : Afin de pénaliser les réponses basées sur le hasard, l'exercice est noté en entier de la manière suivante : Notons par n et m respectivement le nombre de réponses justes et fausses. La note attribuée à l'exercice sera :

$n+2$	si $n \geq 10$
n	si $m < 5$
0	si $m \geq 5$

" La vie est complexe car nous avons tous une partie réelle et une partie imaginaire "

Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?	V ou F
Q3.01 : $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, \exists z \in \mathbb{N}, x = yz$	
Q3.02 : $\forall x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N}, \forall z \in \mathbb{N}, x = yz$	
Q3.03 : Sept cars (identiques) pleins aux deux tiers partent de Meknès à Fès, un quart des touristes descend de chaque car. Les trois quarts des touristes restants sont rassemblés dans trois cars.	
Q3.04 : Le produit de deux fonctions négatives décroissantes est une fonction croissante	
Q3.05 : Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $]a, +\infty[$, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$	
Q3.06 : Une fonction ni continue ni monotone peut être bijective	
Q3.07 : Soient les fonctions $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$, on note par $\mathcal{D}_{uov}$ et $\mathcal{D}_{vou}$ les ensembles de définition respectifs de $u \circ v$ et $v \circ u$. On a $\mathcal{D}_{uov} = \mathcal{D}_{vou}$	
Q3.08 : On note F l'ensemble des applications f continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant $\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \ f(x+y) f(x-y) = (f(x) f(y))^2 \\ f(0) \geq 0 \end{cases}$ La fonction $x \longmapsto 2^{-x^2}$ appartient F	
Q3.09 : La fonction $f : x \longmapsto x - 1 + \dfrac{\sqrt{(x-1)^2}}{x-1}$ si $x \neq 1$ et telle que $f(1) = 1$ admet une tangente en tout point de $\mathbb{R}$	
Q3.10 : On considère $I_1 = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin x} dx$ et $I_2 = \displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin x}{\cos x} dx$, on a $I_1 = I_2$	
Q3.11 : L'équation $10x^3 + x - 1 = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0, 1[$	
Q3.12 : La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\left(x^2 + 3x + 1\right) e^x$ est une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' - y = (2x+3) e^x$	

Exercice IV : Questions à réponse précise, Barème : 12Pts

Répondre dans la colonne réponse		
Barème	**Question**	**Réponse**
2Pts	**Q4.01 :** Citer parmi les propositions A, B, C et D celles qui sont équivalentes ? $\begin{cases} A: & (P \Longrightarrow Q) \Longrightarrow R \\ B: & (P \text{ et } Q) \Longrightarrow R \\ C: & P \Longrightarrow (Q \Longrightarrow R) \\ D: & (P \Longrightarrow R)\, et\, (Q \Longrightarrow R) \end{cases}$	
1Pt	**Q4.02 :** Soit $f : x \longmapsto f(x)$ une fonction deux fois dérivable sur $]-1, 1[$ et soit la fonction $F : x \longmapsto f(\sin t)$ définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Déterminer la dérivée seconde de F.	
1Pt	**Q4.03 :** Calculer $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \sqrt{x^2+x+1} - x$	
2Pts	**Q4.04 :** On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f, g\}$. **a)** Déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E. **b)** Soient $A = \{a, b, d, f\}$ un des sous.ensembles de E, calculer le nombre d'applications de E dans A.	
0Pt	**Q4.05 :** Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]1, +\infty[$ par : $$g(x) = (x+1)\ln(x+1) - (x-1)\ln(x-1)$$ Calculer $g'(x)$	
1Pt	**Q4.06 :** Calculer l'intégrale $\int_2^3 \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) dx$	
2Pts	**Q4.07 :** Déterminer l'ensemble $f(I)$ dans les cas suivants : **a)** $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$ et $I =]0, 1[$ **b)** $f(x) = \sin x$ et $I =]0, \pi]$	
1Pt	**Q4.08 :** Soit A le point de coordonnées $(1, -2)$ et $\mathcal{D}$ la droite d'équation $3x + 4y - 1 = 0$. Calculer la distance de A à $\mathcal{D}$.	
1Pt	**Q4.09 :** Calculer la partie réelle et imaginaire du complexe $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^9$	
1Pt	**Q4.10 :** Au fond d'un puits de 12 m se trouve un escargot. Pendant la journée, il grimpe de 3 m. Mais chaque nuit, il glisse de 2 m. Il commence son ascension le 1er juin à 8 heures. Quel jour et quelle heure sortira-t-il du puits ?	