Université Moulay Ismaïl

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filières : Sciences Expérimentales et Techniques

Epreuve de Mathématiques

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

Questions à réponse précise, Partie I

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur (1Pt))

Questions	Réponses
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (a) La somme de deux fonctions monotones est monotone (b) $\forall x > 1, \dfrac{x-1}{\ln(x-1)} \in \mathbb{R}$ (c) Soit A, B et C trois ensembles, on a $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ (d) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0$ (e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel	
Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes : (a) La fonction f est constante sur $[0, 5]$ (b) La fonction ψ est strictement décroissante et positive (c) La fonction g n'est pas injective sur l'ensemble E (d) La fonction h, définie sur $\mathbb{R}$, atteint toutes les valeurs de $\mathbb{N}$ (e) Tout réel possède une racine carré dans $\mathbb{R}$	

Questions à réponse précise, Partie II

Répondre dans la colonne Réponses (Chaque question est notée sur **(2Pts)**)

Questions	Réponses
Soit le segment $P_1(-8, 5)$ et $P_2(6, 11)$. Déterminer les coordonnées du point $P(x,y)$ situé aux deux tiers de ce segment à partir du point P_1	
Trouver les entiers relatifs a, b et c de sorte que pour tout $x \in I\!R$, $(x-a)(x-10)+1 = (x+b)(x+c)$	
E, F et G étant trois ensembles finis, exprimer $card(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles E, F, G, $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$ et $E \cap F \cap G$	
Exprimer à l'aide d'intervalles de $I\!R$ l'ensemble suivant : $A = \{x \in I\!R \ / \ 2 \leq \lvert x \rvert < 4\}$	
Représenter graphiquement le domaine limité par : $x^2 + y^2 + 2y \leq 3$, $x + y \leq 0$ et $x > -1$	
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples $+$, $-$, $*$ et $/$	
Calculer le nombre complexe $B = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$	
Calculer $\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$	
Calculer $\beta = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (2k+7)$	
Diviser $20xy + 5y^2 - 10y - 12x + 6$ par $5y - 3$ avec $x \in I\!R$ est un paramètre fixé	

Questions à réponse précise, Partie C

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur **(2Pts)**)

Questions	Réponses
Pour quelles valeurs de $\beta \in \mathbb{R}$, l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0,\ 1]$?	
Déterminer la fonction f telle que $gof\,(x) = 2\,\lvert x\rvert$ sachant que g est la fonction définie par $g\,(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	
Calculer $\int t^3 \cos t^2\, dt$	
Soit la fonction f définie sur $I = [0,\ 3]$ par $f\,(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x \in]0,\ 2[\\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in]2,\ 3] \end{cases}$ Calculer $F\,(x) = \int_0^x f\,(x)\, dx$ avec $x \in I$	
On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'intégrale $I_n = \int_0^1 x^n e^{2x} dx$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} avec $n > 1$	
Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f\,(x) = x \ln \lvert x+1 \rvert$	
Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f\,(x) = \dfrac{2e^x + 1}{1 - e^x}$	
Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x}}$	
Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\lvert E\,(x) \rvert = 3$ avec $E\,(x)$ est la partie entière de x	
Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0,\ 2\pi[$ vérifiant l'équation : $(\sin x)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$	

Université Moulay Ismaïl

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers — Meknès

CONCOURS D'ENTREE en 1ère Année

Filières : Sciences Expérimentales et Techniques

Epreuve de Mathématiques

Mardi 09/08/11 - Durée : 2h 10mn

Questions à réponse précise, Partie I

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur **(1Pt)**)

Questions	Réponses
Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ? (a) La somme de deux fonctions monotones est monotone (b) $\forall x > 1, \frac{x-1}{\ln(x-1)} \in I\!R$ (c) Soit A, B et C trois ensembles, on a $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$ (d) $\forall x \in I\!R, x^2 < 0 \Longrightarrow x < 0$ (e) La somme de deux irrationnels est un irrationnel	a) Fausse. (b) Fausse : $D_f =]1,2[\cup]2,+\infty[$ (c) Fausse, pour $A = B = \mathbb{R}$ et $C = \mathbb{R}^+$ $(A \cup B) \cap C = \mathbb{R}^+$ et $A \cup (B \cap C) = \mathbb{R}$ (d) Vrai, (e) Fausse, $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ sont irrationnels mais leur somme qui est nulle n'est pas irrationel
Traduire à l'aide des quantificateurs les propositions suivantes : (a) La fonction f est constante sur $[0, 5]$ (b) La fonction ψ est strictement décroissante et positive (c) La fonction g n'est pas injective sur l'ensemble E (d) La fonction h, définie sur $I\!R$, atteint toutes les valeurs de $I\!N$ (e) Tout réel possède une racine carré dans $I\!R$	(a) $(\exists k \in \mathbb{R})(\forall x \in [0,5])\ f(x) = k$ (e) $(\forall b \in \mathbb{R})(\exists a \in \mathbb{R})\ b = a^2$

Questions à réponse précise, Partie II

Répondre dans la colonne Réponses (Chaque question est notée sur **(2Pts)**)	
Questions	**Réponses**
Soit le segment $P_1(-8, 5)$ et $P_2(6, 11)$. Déterminer les coordonnées du point $P(x, y)$ situé aux deux tiers de ce segment à partir du point P_1	
Trouver les entiers relatifs a, b et c de sorte que pour tout $x \in I\!R$, $(x-a)(x-10)+1 = (x+b)(x+c)$	
E, F et G étant trois ensembles finis, exprimer $card(E \cup F \cup G)$ en fonction des cardinaux des ensembles E, F, G, $E \cap F$, $E \cap G$, $F \cap G$ et $E \cap F \cap G$	$Card(E \cup F \cup G) = Card(E) + Card(F) + Card(G) - Card(E \cap F) - Card(E \cap G) - Card(F \cap G) + Card(E \cap F \cap G)$
Exprimer à l'aide d'intervalles de $I\!R$ l'ensemble suivant : $A = \{x \in I\!R \ / \ 2 \leq \|x\| < 4\}$	$A = [2, 4] \cup [-4, -2]$
Représenter graphiquement le domaine limité par : $x^2 + y^2 + 2y \leq 3$, $x + y \leq 0$ et $x > -1$	
Comment faire 21 avec les chiffres 1 5 6 et 7 utilisés qu'une fois chacun, et en utilisant à son gré les opérateurs simples $+$, $-$, $*$ et $/$	$6 \div (1 - 5 \div 7) = 6 \div \frac{2}{7} = 21$
Calculer le nombre complexe $B = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$	$B = \left[\sqrt{2}, \frac{7\pi}{12}\right]^{24} = \left[2^{12}, 14\pi\right] = 2^{12} = 4096$
Calculer $\alpha = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k + 3^{k+2}}{5^{k+1}}$	$\alpha = \frac{2}{15}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) + \frac{27}{10}\left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n\right)$
Calculer $\beta = \sum_{k=1}^{n} (2k+7)$	$\beta = \sum_{k=1}^{n} (2k+7) = n(n+8)$
Diviser $20xy + 5y^2 - 10y - 12x + 6$ par $5y - 3$ avec $x \in I\!R$ est un paramètre fixé	

Questions à réponse précise, Partie C

Répondre dans la colonne Réponses (NB : Chaque question est notée sur **(2Pts)**)	
Questions	**Réponses**
Pour quelles valeurs de $\beta \in I\!R$, l'équation $x^2 + \sqrt{x} - \beta = 0$ admet une unique racine dans l'intervalle $[0,\ 1]$?	
Déterminer la fonction f telle que $gof\,(x) = 2\lvert x\rvert$ sachant que g est la fonction définie par $g\,(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$	
Calculer $\displaystyle\int t^3 \cos t^2 \, dt$	$-\dfrac{\cos^2 t}{4} + \dfrac{t^4 . \cos^2 t}{4} + \dfrac{1}{4}$
Soit la fonction f définie sur $I = [0,\ 3]$ par $f\,(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x = 0 \\ xe^{x^2} & \text{si } x \in]0,\ 2[\\ 1 & \text{si } x = 2 \\ \dfrac{2x}{1+x^2} & \text{si } x \in]2,\ 3] \end{cases}$ Calculer $F\,(x) = \displaystyle\int_0^x f\,(x)\,dx$ avec $x \in I$	
On considère, pour tout $n \in I\!N^*$, l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^{2x} dx$. Trouver une relation entre I_n et I_{n-1} avec $n > 1$	
Calculer la dérivée, lorsqu'elle existe, de la fonction suivante : $f\,(x) = x \ln \lvert x+1\rvert$	
Déterminer l'équation de la droite qui est asymptote à la courbe C_f en $+\infty$ de la fonction f, définie sur $I\!R^*$ par $f\,(x) = \dfrac{2e^x + 1}{1 - e^x}$	
Calculer $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{2x+1}{\sqrt[3]{x^3 + 3x}}$	
Résoudre dans $I\!R$ l'équation $\lvert E\,(x)\rvert = 3$ avec $E\,(x)$ est la partie entière de x	
Donner l'ensemble S des réels appartenant à l'intervalle $[0,\ 2\pi[$ vérifiant l'équation : $(\sin x)^2 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \sin x = 0$	