CONCOURS D'ACCES EN PREMIERE ANNEE DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT
29-06-2004

Epreuve de MATHEMATIQUES
(Durée : 3Heures)

Avertissement :
Il sera tenu compte dans l'appréciation des copies de la concision et de la précision de la rédaction. On pourra admettre les résultats d'une question pour traiter les suivantes.

Exercice 1

I) **1)** Montrer que l'intégrale $G = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ converge.

2) Dans le plan $\mathbb{R}^2$ on considère pour tout $r \geq 0$ les domaines

$\Omega_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; 0 \leq x \leq r, \; 0 \leq y \leq r\}$, $\Delta_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; ; \; x \geq 0, \; y \geq 0, \; x^2+y^2 \leq r^2\}$

et les intégrales doubles de la fonction $(x,y) \longmapsto e^{-x^2+y^2}$ sur ces domaines

$$A(r) = \int\int_{\Omega_r} e^{-x^2+y^2} dxdy \; , \; B(r) = \int\int_{\Delta_r} e^{-x^2+y^2} dxdy.$$

Etablir les inégalités

$$A(\frac{r}{\sqrt{2}}) \leq B(r) \leq A(r).$$

En déduire que, quand $r \longrightarrow +\infty$, $A(r)$ et $B(r)$ ont une limite commune que l'on calculera en fonction de G.

3) Calculer $B(r)$ en utilisant les coordonnées polaires et en déduire la valeur de G.

II) **1)** Déterminer pour quelles valeurs de la variable réelle x l'intégrale $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est convergente. Etablir, pour ces valeurs de x, l'égalité : $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n)$ et $\Gamma(n + \frac{1}{2})$.

2) Soit $f \; : \; [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction strictement positive, de classe $\mathcal{C}^2$, ayant un maximum global strict en 0 et telle que $f''(0) < 0$.

a) Montrer que : $\exists\, a > 0; \;\; \forall t \in [-1,1] \qquad f(t) \leq f(0)e^{-at^2}$.

b) En admettant que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{((f(0))^n} \int_{-\sqrt{n}}^{\sqrt{n}} \left(f\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)\right)^n dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{f''(0)}{2f(0)}t^2} dt,$$

Montrer que : $$\int_{-1}^{1} (f(t))^n dt \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \frac{(f(0))^{n+\frac{1}{2}}}{\sqrt{|f''(0)|}}.$$

3) **a)** En utilisant un changement de variable convenable, écrire pour tout entier $n \geq 1$, $\Gamma(n+1)$ sous la forme $n^{n+1}e^{-n} \int_{-1}^{+\infty} (g(t))^n dt$, où g est une fonction que l'on explicitera.

b) Montrer que, lorsque $n \longrightarrow +\infty$, $\int_1^{+\infty} (g(t))^n dt$ est négligeable devant $\frac{1}{\sqrt{n}}$.

c) En déduire un équivalent de $\Gamma(n+1)$ lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

III) **1)** On suppose que pour toute fonction continue $h \; : \;]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\int_0^{+\infty} e^{-t} |h(t)| dt < +\infty$, on a : $\int_0^{+\infty} e^{-t} h(t) dt = \lim_{n \to +\infty} \int_0^n (1 - \frac{t}{n})^n h(t) dt$.

a) Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t \, dt = -\gamma$, où γ est la constante d'Euler

$$\gamma = \lim_{n \to +\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right).$$

b) Montrer que $\int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t} dt = \gamma$.

2) Soient $x, \; y \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt$.

a) Justifier l'existence de cette intégrale et calculer $B(x,n)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que, pour $p, \; q \in \mathbb{N}^*$, $B(p,q) = \frac{(p-1)!(q-1)!}{(p+q-1)!}$.

c) Montrer que, pour $x,\ y \in \mathbb{R}_+^*$, $B(x,y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$.

3) a) Démontrer la relation :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x n!}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\ln\Gamma(x) = -\ln x - \gamma x + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{x}{n} - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right).$$

4) Soit $\xi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction logarithmiquement convexe (*c'est-à-dire* la fonction $x \longmapsto \ln\xi(x)$ est convexe), vérifiant $\xi(1) = 1$ et la relation fonctionnelle $\xi(x+1) = x\xi(x)$ $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$.

a) Soient $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, $\lambda \in [0,1]$ et posons $t = \lambda x + (1-\lambda)y$. Montrer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'inégalité

$$t(t+1)\dots(t+n)\xi(t) \le (x(x+1)\dots(x+n)\xi(x))^{\lambda}(y(y+1)\dots(y+n)\xi(y))^{1-\lambda}$$

b) En déduire que : $\qquad \dfrac{\xi(t)}{\Gamma(t)} \le \left(\dfrac{\xi(x)}{\Gamma(x)}\right)^{\lambda}\left(\dfrac{\xi(y)}{\Gamma(y)}\right)^{1-\lambda}.$

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\xi(x) = \Gamma(x)$.

IV) On note Ψ la dérivée logarithmique de la fonction Γ : $\Psi = (\ln\Gamma)' = \dfrac{\Gamma'}{\Gamma}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

1) a) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, exprimer $\Psi^{(p)}$, la dérivée p-ième de la fonction Ψ, comme la somme d'une série de fonctions.

b) Exprimer, en fonction de la constante d'Euler γ, les nombres $\Gamma'(1)$ et $\Gamma''(1)$.

2) a) Montrer la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \Psi(n+1) + \gamma.$$

b) Démontrer, pour tout entier $p \ge 2$, la relation :

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p} = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!}\Psi^{(p-1)}(n+1) + \zeta(p),$$

où $\zeta(p) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k^p}$.

Exercice 2

Soient α et β deux paramètres réels et soit la matrice :

$$M_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & -1 \\ 2 & \alpha & \beta \\ -3-\beta & -1 & \alpha \end{bmatrix}$$

1) a) Pour quelles valeurs de α et β la matrice M_α est-elle non inversible ?

b) Déterminer le polynôme caractéristique de M_α.

c) Quels sont les valeurs propres et les vecteurs propres de M_α.

d) Soient les trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $V_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2-\beta \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1-\beta \\ -2 \end{bmatrix}$.

Montrer qu'ils sont linéairement indépendants et que $\{V_1, V_2\}$ est une base du sous-espace $\mathrm{Ker}\,[(M_\alpha - (\alpha-1)Id)^2]$, où Id est la matrice identité.

2) On pose par convention $M_\alpha^0 = Id$.

a) Calculer M_1^n, pour tout entier n.

b) A présent on suppose que $\alpha \neq 1$. En utilisant le **2) a)** montrer que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, \qquad M_\alpha^n = \varphi_\alpha(n) M_1^2 + n(\alpha-1)^{n-1} M_1 + (\alpha-1)^n Id,$$

où φ_α est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} \varphi_\alpha(0) = 0 \\ \varphi_\alpha(n+1) = (\alpha+2)\varphi_\alpha(n) + n(\alpha-1)^{n-1} \end{cases} \qquad \mathbf{(1)}$$

c) Montrer que la solution de $(\mathbf{1})$ est

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \qquad \varphi_\alpha(n) = (\lambda n + \mu)(\alpha-1)^{n-1} + \nu(\alpha+2)^n,$$

où λ, μ et ν sont des réels que l'on déterminera.