

**CONCOURS D'ACCES EN 1ère ANNEE DU
CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT
14 JUILLET 2010**

**EPREUVE MATHÉMATIQUES
(DUREE 2H)**

Avertissement :

L'appréciation des copies tient compte de la rigueur, de la clarté des raisonnements et de la présentation.

Problème 1

On considère l'équation différentielle

$$E: y' - y = \ln x, x > 0$$

1. Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y' - y = 0$
2. Justifier pour tout réel x strictement positif l'existence de $\int_0^x e^{-t} \ln t dt$.
3. Montrer que les solutions sur $]0, +\infty[$ de E sont les fonctions $f_c : x \rightarrow ce^x + e^x \int_0^x e^{-t} \ln t dt$, où c est une constante réelle.
4. Justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$
5. Soit $\alpha = -\int_0^{+\infty} e^{-t} \ln t dt$, montrer que si $c \neq \alpha$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_c(x) = \pm\infty$ et que la courbe de f_c admet une branche infinie qu'on déterminera.
6. Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} f_c(x)$.
7. Dans toute la suite du problème la lettre x désigne un réel strictement positif, n un entier naturel. Justifier l'existence de l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$
8. En intégrant par parties, montrer que $f_\alpha(x) = -\ln(x) - e^x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$
9. En déduire la valeur de $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\alpha(x)$.
10. Etudier $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_\alpha(x)}{x}$ et en donner une interprétation géométrique
11. Justifier l'existence et calculer $I_n(x) = \int_0^x t^n \ln t dt$, pour $n \in \mathbb{N}$.
12. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{(n+1)(n+1)!}$ converge.
13. Montrer que pour tout réel $x > 0$, la fonction $\phi : t \rightarrow t \ln t$ est bornée sur $]0, x]$. Soit M_x un majorant de $|\phi|$.
14. Soit $R_n(x) = \int_0^x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-t)^k \ln t}{k!} dt$. Après justification de la convergence des séries $\sum_{k \geq 0} \frac{(-t)^k \ln t}{k!}$, et $\sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{k!}$, démontrer la majoration $|R_n(x)| \leq M_x \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$.
15. Montrer alors que $f_0(x) = e^x \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_k(x)$
16. Etudier la convergence de la série de terme général $a_n = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k (k-1)!$.

1 Problème 2

On munit l'espace $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique noté $(\cdot|\cdot)$ et on l'oriente de telle sorte que sa base canonique (i, j, k) soit orthonormale directe. Pour $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ on définit la matrice $M_u = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ et f_u l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ de matrice M_u dans la base (i, j, k) . On note $\mathcal{M}$ l'ensemble des matrices M_u , $u \in \mathbb{R}^3$, et $\mathcal{V}$ l'ensemble des endomorphismes f_u , $u \in \mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $\mathcal{M}$ et $\mathcal{V}$ sont des espaces vectoriels de dimension 3.
2. Soit $u = (a, b, c)$ et $v = (a', b', c')$. Calculer $M_u M_v$ et montrer que $M_u M_v \in \mathcal{M}$.
En déduire que $\mathcal{M}$ est une algèbre. Est-elle commutative ?
3. On note φ et q les applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ par
$$\begin{cases} \varphi(u) = (u|i + j + k) \\ q(u) = \|u\|^2 - (u|f_j(u)) \end{cases}$$
4. Montrer que φ est une forme linéaire et que q est une forme quadratique positive.
Est-ce que q est définie positive ?
5. Calculer le déterminant de M_u en fonction de φ et q . En déduire que f_u n'est pas bijective si et seulement si u appartient à un plan (dont on donnera l'équation) ou à son orthogonal.
6. Soit $u = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que f_u soit une rotation et que son orbite ait 6 éléments. Soit v et w respectivement les éléments de $\mathcal{O}_u$, $v = (b, c, a)$ et $w = (c, a, b)$. On note par α , β et γ les mesures des angles des rotations f_u , f_v et f_w .
7. Calculer

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma \\ \sigma_2 &= \cos \alpha \cos \beta + \cos \beta \cos \gamma + \cos \gamma \cos \alpha \\ \sigma_3 &= \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma \end{aligned}$$

(Utiliser les propriétés de la trace d'un endomorphisme)