المعهد الوطني للبريد والمواصلات السلكية واللاسلكية
INSTITUT NATIONAL DES POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

CONCOURS D'ACCES EN DEUXIEME ANNEE DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT
12- 07 -2001

Epreuve de MATHEMATIQUES
(Durée :3Heures)

Avertissement :

- **Les 3 problèmes doivent être traités sur des feuilles séparées.**
- L'appréciation des copies tient compte de la rigueur ,de la clarté des raisonnements et de la présentation.
- Encadrer vos résultats.

AGENCE NATIONALE DE RÉGLEMENTATION DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

Problème I

Les deux parties sont indépendantes et pourront être traitées indépendemment.

Partie A

Soient $X_1,\ X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, la densité de X_n est donnée par :

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sh}(x)}{n} \exp\left(\dfrac{1-\operatorname{ch}(x)}{n}\right) & \text{pour } x \geq 0 \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

où $\operatorname{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ et $\operatorname{ch}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2}$.

1) Étudier la convergence en loi de $\ln(\operatorname{ch}(X_n)) - \ln(n)$.

2) Étudier la convergence en probabilité de $\dfrac{\ln(\operatorname{ch}(X_n))}{\ln(n)}$.

3) Étudier la convergence en probabilité de $\dfrac{X_n}{\ln(n)}$.

(*Pour les trois questions, on précisera la limite s'il y a lieu.*)

Partie B

Soit X une variable aléatoire réelle de loi gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$.

1) a) Montrer que la fonction caractéristique de X est : $t \mapsto \exp\left(-\dfrac{t^2}{2}\right)$.

1) b) En déduire que la fonction caractéristique d'une gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$) est : $t \mapsto \exp\left(-\dfrac{\sigma^2 t^2}{2} + i\mu t\right)$.

2) Soient $X_1,\ X_2, \ldots$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour chaque n, X_n suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$ (où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n > 0$). On suppose de plus que X_n converge en loi vers X.

2) a) Montrer que σ_n converge vers un réel positif.

2) b) Montrer que la suite (μ_n) est bornée. On pourra utiliser un argument par l'absurde, en considérant les fonctions de répartition de X_n et de X.

2) c) En déduire que X est une variable aléatoire gaussienne.

3) On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\begin{pmatrix} X_n \\ Y_n \end{pmatrix}$ est un vecteur gaussien. On suppose de plus que X_n et Y_n convergent en probabilité respectivement vers X et Y. Le vecteur aléatoire $\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ est-il gaussien ? (Prouver qu'il s'agit d'un vecteur gaussien, ou donner un contre exemple.)

Problème II

Les deux parties sont indépendantes et pourront être traitées indépendemment.

Partie A

1) Développer en série de Fourier complexe la fonction périodique g donnée sur $]0,1[$ par $g(x) = \frac{1}{2} - x$.

2) En déduire la somme de la série $S = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{2i\pi nx}$.

Partie B

Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite à décroissance rapide si :

(a) f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

(b) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\lim_{|x|\to+\infty} (1+x^2)^k f^{(n)}(x) = 0$.

Soit f une fonction à décroissance rapide et T un réel strictement positif.

1) Montrer que la série $\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(x+nT)$ converge localement et uniformément sur tout $\mathbb{R}$ vers une fonction g de classe C^1.

2) Donner les coefficients de Fourier de g. La fonction g est-elle en tout point la somme de sa série de Fourier ?

3) Déduire de ce qui précède la formule dite sommatoire de Poisson, à savoir :

$$T \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} f(nT) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} F\left(\frac{n}{T}\right),$$

avec F désignant la transformée de Fourier de f.

4) Application: Calculer pour $a > 0$, la somme de la série de Fourier $\sum_{n=1}^{n=+\infty} \frac{1}{n^2+a^2}$.
On rappelle que la transformée de Fourier de la fonction $f(x) = \frac{1}{x^2+a^2}$ est donnée par $F(x) = \frac{\pi}{a} e^{-2a\pi|x|}$.

Problème III

Les deux parties sont indépendantes et pourront être traitées indépendemment.

Partie A

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application trois fois continûment dérivable dans un intervalle $[a,\ b]$ de $\mathbb{R}$ telle que l'équation : $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $[a, b]$. On suppose que : $f'(\alpha) \neq 1$.

On considère sur $[a, b]$, l'application : $D(x) = f(f(x)) - 2\,f(x) + x$

Pour $x^{(0)} \in [a, b]$ et $k \geq 0$, on définit une suite $(x^{(k)})$ par :

$$(*) \quad x^{(k+1)} = G(x^{(k)}) \text{ où } G(x) = \begin{cases} x - \frac{[f(x)-x]^2}{D(x)} & \text{si } D(x) \neq 0 \\ x & \text{si } D(x) = 0 \end{cases}$$

1) Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par : $g(h) = \begin{cases} \frac{f(\alpha+h)-\alpha}{h} & \text{si } h \neq 0 \\ f'(\alpha) & \text{si } h = 0 \end{cases}$

Démontrer que, pour $h \neq 0$, on a :

$$D(\alpha + h) = h\ E(h) \quad \text{où } E \text{ est une application à déterminer.}$$

2) a) Montrer que, pour $0 < |h| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et assez petit, on a : $E(h) \neq 0$.

2) b) En déduire que, pour $0 < |h| \leq \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$ et assez petit, on a :

$$G(\alpha + h) = \alpha + h - h\ \frac{[g(h)-1]^2}{E(h)}.$$

3) Démontrer que, pour $x^{(0)}$ suffisamment proche de α, la suite $(x^{(k)})$ définie par $(*)$ converge vers α et donner l'ordre de convergence.

Partie B

Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application deux fois continûment différentiable dans un domaine V de $\mathbb{R}^2$, telle que l'équation : $F(x) = x$ admet une unique solution α dans V.

Pour $x^{(0)} \in V$, on considère la suite $(x^{(k)})$ définie par : $x^{(k+1)} = F(x^{(k)}),\quad k \geq 0$.

1) Démontrer que, pour $x^{(0)} \in V$ et $k \geq 0$, on a:

$$(**) \quad x^{(k+1)} - \alpha = J(\alpha)(x^{(k)} - \alpha) + o(\|x^{(k)} - \alpha\|^2)$$

où $J(\alpha)$ est la matrice jacobienne de F au point α.

2) On néglige, dans la formule $(**)$, le terme $o(\|x^{(k)} - \alpha\|^2)$.

2) a) Montrer que, pour $x^{(0)}$ et $x^{(1)} \in V$ et $k \geq 0$, on a:

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = J(\alpha)(x^{(k)} - x^{(k-1)})$$

Pour tout $k \geq 1$, on pose : $X_k = (x^{(k)}, x^{(k+1)})$ et on suppose que : $\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$ et $(\Delta X_k - \Delta X_{k+1})$ sont inversibles.

2) b) Exprimer α en fonction de $x^{(k)}$, $x^{(k+1)}$, ΔX_k et ΔX_{k+1}.

2) c) Donner un schéma itératif qui ne dépend pas de α.