

**CONCOURS D'ACCES EN DEUXIEME ANNEE
DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT DE L'INPT
15- 07 -2004**

**EPREUVE DE MATHEMATIQUES - INFORMATIQUE
DUREE : 3 HEURES**

N.B.

L'épreuve comporte deux (2) parties, une partie mathématique et une partie informatique. Chaque partie devra être traitée sur des feuilles séparées.

- L'appréciation des copies tient compte de la rigueur, de la clarté des raisonnements et de la présentation.
- Encadrer vos résultats.
- Ecrire avec un stylo à bille ou à encre, bleu ou noir.

Partie Mathématiques

Exercice 1

Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 , vérifiant :

$$(i) \quad \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{R}^p, \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \geq \alpha \|x - y\|^2$$

$$(ii) \quad \exists M > 0 \text{ tel que } \forall x, y \in \mathbb{R}^p, \|\nabla f(x) - \nabla f(y)\| \leq M \|x - y\|,$$

où $\nabla f(x)$, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et $\|\cdot\|$ désignent respectivement le gradient de f en x , le produit scalaire euclidien et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^p .

1) Montrer que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^p, f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle + \frac{\alpha}{2} \|x - y\|^2.$$

2) Montrer que f est strictement convexe et que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow +\infty$. En déduire qu'il existe un unique $x^* \in \mathbb{R}^p$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, $f(x^*) \leq f(x)$

3) Soient $\rho \in]0, \frac{2\alpha}{M^2}[$ et $x_0 \in \mathbb{R}^p$. Montrer que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $x_{n+1} = x_n - \rho \nabla f(x_n)$, est une suite de Cauchy. En déduire qu'elle converge vers x^* .

Exercice 2

1) Soient X_1, X_2, X_3 des variables aléatoires indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, de densité donnée par

$$g(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x \in \mathbb{R}_+^* \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit $X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)}$ le réarrangement par ordre croissant des variables aléatoires X_1, X_2, X_3 .

1.a) Montrer que la densité du vecteur aléatoire $(X_{(1)}, X_{(2)}, X_{(3)})'$ est définie par :

$$f(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 6\lambda^3 e^{-\lambda(x_1+x_2+x_3)} & \text{si } (x_1, x_2, x_3) \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $E = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 ; 0 < x_1 < x_2 < x_3\}$.

1.b) En déduire que les variables aléatoires $Y_1 = X_{(1)}$, $Y_2 = X_{(2)} - X_{(1)}$, $Y_3 = X_{(3)} - X_{(2)}$ sont indépendantes et que, pour $k = 1, 2, 3$, Y_k suit une loi exponentielle de paramètre $(4 - k)\lambda$.

2) *Application* : Quatre personnes A, B, C et D arrivent en même temps dans une téléboutique où il y a exactement trois cabines téléphoniques. Ces trois cabines sont occupées immédiatement par A, B et C . D remplace le premier sorti. A, B, C et D quittent la téléboutique aussitôt après avoir terminé leur communication. On désigne, respectivement, par X_1, X_2, X_3 et X_4 les variables aléatoires égales au temps d'occupation de la cabine par A, B, C et D . Ces variables sont supposées indépendantes, et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

2.a) Calculer la probabilité pour que D sorte le dernier de la téléboutique.

2.b) Donner la loi de probabilité du temps total T passé par D à la téléboutique, ainsi que le temps moyen passé par D à la téléboutique.

2.c) Donner la loi de probabilité de l'instant du dernier départ, l'instant 0 étant l'instant d'arrivée des quatre personnes à la téléboutique.

Exercice 3

Soit f une fonction continue, bornée, intégrable telle que sa transformée de Fourier \hat{f} soit aussi intégrable.

1.a) Peut-on appliquer le théorème de Fubini pour calculer $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{2i\pi xy} dy$?

1.b) Montrer qu'il suffit de vérifier que $g(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(y)dy$, où g est une fonction convenablement choisie, pour en déduire : $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{2i\pi xy} dy, \forall x \in \mathbb{R}$.

2) Soit h une fonction intégrable. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\int_{\mathbb{R}} f(\varepsilon t)\hat{h}(t)dt = \int_{\mathbb{R}} h(\varepsilon t)\hat{f}(t)dt.$$

3) En appliquant ce qui précède à une fonction h particulière dont on connaît la transformée de Fourier, établir la formule d'inversion :

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(y)e^{2i\pi xy} dy.$$

Partie Informatique

Préliminaires :

Pour écrire les algorithmes des exercices 1 et 2, vous pouvez utiliser les pseudo types et les pseudo instructions suivants :

Pseudo types :

- *Integer* est le type des entiers
- *Char* est le type des caractères
- *Boolean* est le type des éléments dont les valeurs possibles sont « True » ou « False »
- *Real* est le type des nombres réels
- *Tableau [1..N] of T* est le type d'un tableau de N éléments de type T.

Pseudo instructions

- **v : T** déclare que v est une variable de type T
- **v ← val** affecte la valeur « val » à la variable déjà déclarée v.
- **Afficher(Expr)** affiche à l'écran la valeur de l'expression « Expr » (une expression peut être nombre ou une chaîne de caractères)
- **Lire(v)** Lit une valeur au clavier et l'affecte à la variable v.
- L'instruction conditionnelle **If** a la forme suivante :

If (*expression booléenne*)

Début

.....

Fin

Else

Début

.....

Fin

- La boucle **While** a la forme suivante :

While (*expression booléenne*)

Début

.....

Fin

- La boucle **For** a la forme suivante :

For (**i variant de Vi à Vf**)

Début

.....

Fin

Remarque : Vi est la valeur initiale de i et Vf est sa valeur finale . La valeur de i s'incrémente de 1 après chaque itération

- **/* Ceci est un commentaire */** Insère un commentaire

Remarque : Toute variable utilisée dans un algorithme doit être déclarée

EXERCICE 1 :

Soit T un tableau de 10 éléments réels strictement positifs. Ces éléments ne sont pas nécessairement distincts. En utilisant les pseudo types et les pseudo instructions définis plus haut, écrire un algorithme qui permet de:

- Lire au clavier les éléments du tableau T
- Afficher la valeur d'une variable réelle **E_{max}** contenant le plus grand élément du tableau T.
- Afficher les indices de **E_{max}** du tableau T.

Par exemple : Soit T le tableau suivant :

Élément	2.5	8	3	9	5.5	9	3	2	8	9
Indice	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

La variable E_{max} = 9

Les indices de E_{max} dans T sont : 4, 6 et 10

EXERCICE 2 :

En utilisant les pseudo types et les pseudo instructions définis en préliminaires, écrire un algorithme qui permet de :

- Lire au clavier une chaîne de caractères **Ch** (10 caractères au maximum)
(Une chaîne de caractères sera considérée comme un tableau de caractères)
- Afficher la valeur d'une variable entière **N** contenant le nombre exact de caractères de la chaîne Ch. (La fonction **taille(Ch)** retourne le nombre exact de caractères de la chaîne de caractères **Ch**)
- Afficher si **Ch** est un palindrome ou non

Une chaîne de caractères est un palindrome si elle peut se lire de la même façon de droite à gauche que de gauche à droite. Ainsi, les chaînes ELLE, AZIZA, OMO sont des palindromes, alors que les chaînes ELLA, AMI ne sont pas des palindromes.

Exemple 1:

Lecture au clavier : Ch = AZIZA

Affichage : N=5

Affichage : La chaîne AZIZA est un palindrome

Exemple 2:

Lecture au clavier : Ch = ELLA

Affichage : N=4

Affichage : La chaîne ELLA n'est pas un palindrome