Institut National des Postes et Télécommunications

CONCOURS D'ACCES EN DEUXIEME ANNEE
DU CYCLE INE DE L'INPT

EPREUVE DE MATHEMATIQUES

(Aucun document n'est autorisé)

Durée 1H30

MARDI 19 JUILLET 2011

N. B. :

- ***Les problèmes 1 et 2 sont indépendants.***
- ***Les notations de l'énoncé seront respectées.***
- ***La plus grande importance sera attachée à la rigueur des raisonnements***

PROBLEME 1

On considère un signal *x(t)* (*t* exprime le temps) défini comme suit :

$$x(t) = \begin{cases} 1 & t \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}] \quad a>0 \\ 0 & ailleurs \end{cases}$$

On rappelle la transformée de Fourier (T.F) de x(t) et la transformée de Fourier inverse (T.F.I) de *X(f)* :

(T.F) $X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2j\pi f t} dt$, f désigne la fréquence de *x(t)*.

(T. F. I) $x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} X(f) e^{2j\pi f t} df$

1) Montrer que $X(f) = \dfrac{\sin(\pi f a)}{\pi f}$.
2) En utilisant la définition de la transformée de Fourier inverse, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\pi f \alpha)}{\pi f} df = \operatorname{sgn}(\alpha) = \begin{cases} +1 & si \quad \alpha > 0 \\ -1 & si \quad \alpha < 0 \end{cases},$$ *sgn(.)* désigne la fonction signe.

3) Déduire de la question 2 que la transformée de Fourier inverse de la fonction $\dfrac{1}{\pi f}$ est le signal $j \operatorname{sgn}(t)$.

4) Déduire de la question 3 que la transformée de Fourier du signal $\dfrac{1}{\pi t}$ est $-j \operatorname{sgn}(f)$

5) On considère la transformée d'Hilbert d'un signal *x(t)* :

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x(\mu)}{t-\mu} d\mu$$

En utilisant le fait que $\hat{x}(t)$ est la convolution (voir définition ci-dessous) de *x(t)* avec un signal qu'on déterminera, montrer que la transformée de Fourier de $\hat{x}(t)$ est égale à $\hat{X}(f) = -j \operatorname{sgn}(f) X(f)$.

On rappelle la définition de la convolution de deux fonctions $x(t)$ et $y(t)$:

$$z(t) = x(t) * y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\mu)y(t-\mu)d\mu$$

6) En déduire de la question 5 la transformée d'Hilbert des signaux suivants :

$$x_1(t) = \cos(2\pi f_0 t) \qquad x_2(t) = \sin(2\pi f_0 t) \qquad f_0>0$$

PROBLEME 2

On considère un processus $Y(t)$ stationnaire au sens large donné par :

$$Y(t) = X(t+T) - X(t-T)$$

où $X(t)$ est un processus réel, stationnaire au sens large avec une densité spectrale de puissance (DSP) $\gamma_X(f)$ et T est une constante.

Calculer la densité spectrale de puissance de $Y(t)$ en fonction de $\gamma_X(f)$.

On rappelle que :

- La fonction d'autocorrélation d'un processus $X(t)$ réel stationnaire au sens large est définie par :

$$R_X(\tau) = E[X(t)X(t+\tau)] \quad \forall t \in \Re$$

où $E[.]$ définie l'espérance mathématique sur la variable aléatoire du processus $X(t)$.

- La densité spectrale de puissance d'un processus $X(t)$ stationnaire au sens large est définie par :

$$\gamma_X(f) = TF[R_X(\tau)] \quad \text{où } T.F \text{ désigne la transformée de Fourier.}$$