المعهد الوطني للبريد والمواصلات السلكية واللاسلكية
INSTITUT NATIONAL DES POSTES ET TELECOMMUNICATIONS

CONCOURS D'ACCES EN DEUXIEME ANNEE DU CYCLE D'INGENIEURS D'ETAT

(18-07-2000)

Epreuve de Mathématiques

(Durée: 3H00)

Avertissement:
- L'appréciation des copies tient compte de la rigueur, de la clarté des raisonnements et de la présentation.
- Encadrer vos résultats
- Les 4 exercices doivent être traités sur des feuilles séparés

AGENCE NATIONALE DE RÉGLEMENTATION DES TÉLÉCOMMUNICATIONS

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul, x un réel strictement positif et f_n l'application définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_n(t) = \begin{cases} t^{x-1}\left(1-\dfrac{t}{n}\right)^n & si\ 0 < t < n \\ 0 & si\ t \geq n \end{cases}$$

1) a) Montrer l'existence, pour tout x strictement positif de :

$$I_n(x) = \int_0^{+\infty} f_n(t)dt.$$

b) n étant un entier donné et k étant un entier naturel inférieur à n, on pose :

$$A(k) = \int_0^1 u^{x+k-1}(1-u)^{n-k}du \quad \text{où } x \in \mathbb{R}_+^*.$$

Déterminer une relation liant $A(k)$ et $A(k-1)$. En déduire la valeur de $I_n(x)$ en l'exprimant en fonction de $A(n)$ qu'il est facile de calculer.

2) On définie sur $\mathbb{R}_+^*$ la fonction Gamma d'Euler par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\exp(-t)dt.$$

Montrer que :

$$\text{pour tout } \ x \in \mathbb{R}_+^* \ \ \Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(n!n^x \prod_{p=0}^{n} \frac{1}{x+p}\right)$$

3) Montrer que :

$$\frac{1}{\Gamma(x)} = x\exp(\gamma x)\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)\exp(-x/n).$$

où γ est la constante d'Euler : $\gamma = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\ldots+\dfrac{1}{n}-\ln n\right)$.

4) Montrer que la fonction Gamma d'Euler possède un prolongement holomorphe dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}^-$.

Exercice 2

Soit p et q deux entiers positifs.

1) Montrer que :

$$x^p\delta^{(q)} = \begin{cases} (-1)^p\dfrac{q!}{(q-p)!}\delta^{(q-p)} & si\ p \leq q \\ 0 & si\ p > q \end{cases}$$

où $\delta^{(i)}$ est la dérivée $i^{\text{ème}}$ de la distribution de Dirac.

2) En déduire la formule :

$$f\delta^{(q)} = \sum_{p=0}^{q}(-1)^p C_q^p f^{(p)}(0)\delta^{(q-p)},$$

où f est une fonction analytique à l'origine.

3) Calculer :

$$(\sin x)\delta' \quad \text{et} \quad (\cos x)\delta'$$

4) Soit n et m deux autres entiers positifs. Calculer

$$(x^p\delta^{(q)}) * (x^m\delta^{(n)}).$$

Exercice 3

Soit $(E, <.;.>)$ un espace de Hilbert réel de dimension finie. Soient $C_1, \ldots C_N$ (N entier ≥ 2) des parties convexes fermées de E telles que : $C = \bigcap_{i=1}^{N} C_i$ est non vide.

Le problème consiste à construire une suite de points de E dont la limite appartient à C.

Soit $u_0 \in E$ arbitraire ; supposons construits $u_1, \ldots, u_n$; on détermine u_{n+1} ainsi : $\forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}$ on considère u_n^i la projection de u_n sur C_i que l'on note $P_{C_i}(u_n)$, et on pose :

$$u_{n+1} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} u_n^i.$$

1) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, N\}$, $\forall c \in C_i$:

$$(d(u_n, C_i))^2 \leq \|c - u_n\|^2 - \|u_n^i - c\|^2,$$

où $d(u_n, C_i)$ dénote la distance de u_n à C_i.

2) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall v \in E \ : \ \|u_{n+1} - v\|^2 \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\|u_n^i - v\|^2.$$

3) Démontrer qu'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall c \in C \ : \ \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(d(u_n, C_i))^2 \leq \|u_n - c\|^2 - \|u_{n+1} - c\|^2.$$

4) Démontrer que pour tout $c \in C$ la suite $(\|u_n - c\|)$ est convergente dans $\mathbb{R}$. Déduisez-en que : $\forall i \in \{1, \ldots, N\}$, $\lim_{n \to +\infty} d(u_n, C_i) = 0$.

5) Démontrer que de la suite (u_n) on peut extraire une sous-suite convergente vers un $\hat{u} \in E$.

6) Démontrer que si $\lim_{n \in S} u_n = \hat{u}$ et $\lim_{n \in T} u_n = \tilde{u}$, alors on a $\hat{u} = \tilde{u}$ (S et T désignent deux partie infinies de $\mathbb{N}$).

Déduisez des résultats ci-dessus que (u_n) est convergente dans E et que sa limite est une solution du problème posé (*i.e.* la limite est un élément de C).

Exercice 4

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, d'espérance μ de variance σ^2 finie. On pose $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $\Sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ et $S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$.

1) On suppose que la loi des X_i est gaussienne, c'est-à-dire $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$ pour $i = 1, \dots n$,

a) Quelle est la loi de $n\frac{\Sigma^2}{\sigma^2}$?

b) Montrer que $\bar{X}$ et S^2 sont indépendantes.

c) Montrer que $n\frac{S^2}{\sigma^2}$ suit une loi du $\chi^2(n-1)$; on pourra supposer d'abord $\mu = 0$, puis μ quelconque.

2) On ne suppose plus connue la loi des X_i, mais on suppose que $\bar{X}$ et S^2 sont indépendantes. On note ϕ la fonction caractéristique des X_i

a) Soit $\mu = 0$. Calculer l'espérance de nS^2 (que l'on note $E(nS^2)$) en fonction de σ^2 et montrer que pour tout réel t, $E\left(nS^2 \exp(itn\bar{X})\right) = (n-1)\sigma^2\phi^n(t)$. En déduire que ϕ est solution de :

$$\begin{cases} \dfrac{\phi''}{\phi} - \left(\dfrac{\phi'}{\phi}\right)^2 = -\sigma^2 \\ \phi(0) = 1, \quad \phi'(0) = 0. \end{cases}$$

En déduire alors que $X_i \sim N(0, \sigma^2)$ pour $i = 0, \dots, n$.

b) Montrer que l'on peut se passer de l'hypothèse $\mu = 0$.