

Concours d'Accès au Cycle normale de
L'Institut Supérieur d'Etudes Maritimes (ISEM)



Session 6 juillet 2013

Epreuves : Mathématiques (durée : 2h)

Partie I (6 pts)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = x^2 e^{-x}$$

ainsi que sa courbe représentative \mathcal{C} dans un repère orthonormal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Calculer la dérivée de f .
2. En déduire le tableau de variation de f . Préciser les limites de f en $+\infty$.
3. Tracer \mathcal{C} . On choisira une unité graphique de 4 cm.

Partie II (6 pts)

1. Calculer $J = \int_0^1 x e^{-x} dx$.

2. Vérifier que f est telle que : $f'(x) + f(x) = 2x e^{-x}$.

3. En déduire que

$$\int_0^1 f(x) dx = 2J - f(1)$$

(J est définie à la question II - 1.).

Partie III (6pts)

L'équation $f(x) = f(2)$ admet une seconde solution, notée α , et appartenant à l'intervalle $I = [-1, 0]$.

1. Soit $g(x) = \left(-\frac{2}{e}\right) e^{\frac{x}{2}}$. Montrer que $f(\alpha) = f(2)$ équivaut à $g(\alpha) = \alpha$.
2. Montrer que $g(I)$ est inclus dans I et que $|g'(x)| \leq \frac{1}{e}$ pour tout x appartenant à I .
3. En déduire que $|g(x) - \alpha| \leq \frac{1}{e} |x - \alpha|$ pour tout x appartenant à I .
4. On définit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par

$$\begin{cases} U_0 = -0,5 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases} \text{ pour tout entier } n \geq 0$$

On admet que U_n appartient à I pour tout entier $n \geq 0$.
Montrer que

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{e^n} |U_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2e^n}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

5. Déterminer le plus petit entier n tel que l'inégalité précédente fournisse une valeur approchée de α à 10^{-6} près.