

المعادلات التفاضلية

المعادلة التفاضلية هي كل معادلة يكون المجهول فيها دالة عددية وتحتوي على مشتقات هذه الدالة حل معادلة تفاضلية ما يعني إيجاد جميع الدوال y التي تحقق هذه المعادلة . و مجموعة هذه الدوال تسمى الحل العام للمعادلة التفاضلية و كل عنصر من هذه المجموعة يسمى حلا خاصا في هذا الدرس سنتطرق إلى نوعين من المعادلات التفاضلية :

1 - المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى : $y' = ay + b$

2 - المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية : $y'' + ay' + b = 0$

1 - المعادلة التفاضلية من الرتبة الأولى

1 - المعادلة التفاضلية من نوع : $y' = ay$

a - خاصية

ليكن $a \in \mathbb{R}$
الحل العام لمعادلة من نوع $y' = ay$ هو كل دالة y على شكل $y : x \rightarrow Ae^{ax}$ حيث A ثابتة حقيقية تحدد بالشروط البدئية

b - مثال

حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = -3y$ و (E) : الذي يحقق الشرط $y(0) = \frac{1}{5}$

الحل :

حسب الخاصية السابقة الحل العام للمعادلة (E) هو الدالة y المعرفة كما يلي : $y(x) = Ae^{-3x}$ حيث A ثابتة حقيقية سنحددها

$$y(0) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow Ae^0 = \frac{1}{5} \Leftrightarrow A = \frac{1}{5}$$

لدينا

ومنه الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = -3y$ و (E) : الذي يحقق الشرط البدئي $y(0) = \frac{1}{5}$ هو الدالة y المعرفة

$$y(x) = \frac{1}{5}e^{-3x}$$

على \mathbb{R} بما يلي :

2 - المعادلة التفاضلية من نوع : $y' = ay + b$

a - خاصية

ليكن a و b عددين حقيقيين غير منعدمين
الحل العام لمعادلة من نوع $y' = ay + b$ هو كل دالة y على شكل $y : x \rightarrow Ae^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث A ثابتة حقيقية تحدد بالشروط البدئية

b - مثال

حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 7y + 5$ و (E) : الذي يحقق الشرط $y(-1) = 3$

الحل :

حسب الخاصية السابقة الحل العام للمعادلة (E) هو الدالة y المعرفة كما يلي : $y(x) = Ae^{7x} - \frac{5}{7}$ حيث A ثابتة حقيقية سنحددها

$$y(-1) = 3 \Leftrightarrow Ae^{-7} - \frac{5}{7} = 3$$

$$\Leftrightarrow Ae^{-7} = 3 + \frac{5}{7} = \frac{26}{7}$$

$$\Leftrightarrow A = \frac{26}{7}e^7$$

لدينا ادن الحل العام للمعادلة التفاضلية $y' = 7y + 5$ (E): و الذي يحقق الشرط البدئي $y(-1) = 3$ هو الدالة y

المعرفة على \mathbb{R} بما يلي: $y(x) = \frac{26}{7}e^7e^{7x} - \frac{5}{7} = \frac{26}{7}e^{7(x+1)} - \frac{5}{7}$

II - المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

1 - تحديد الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة الثانية:

لتكن (E): $y'' + ay' + by = 0$ معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية

المعادلة التالية $r^2 + ar + b = 0$ تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية (E)

وليكن $\Delta = a^2 - 4b$ مميز المعادلة المميزة

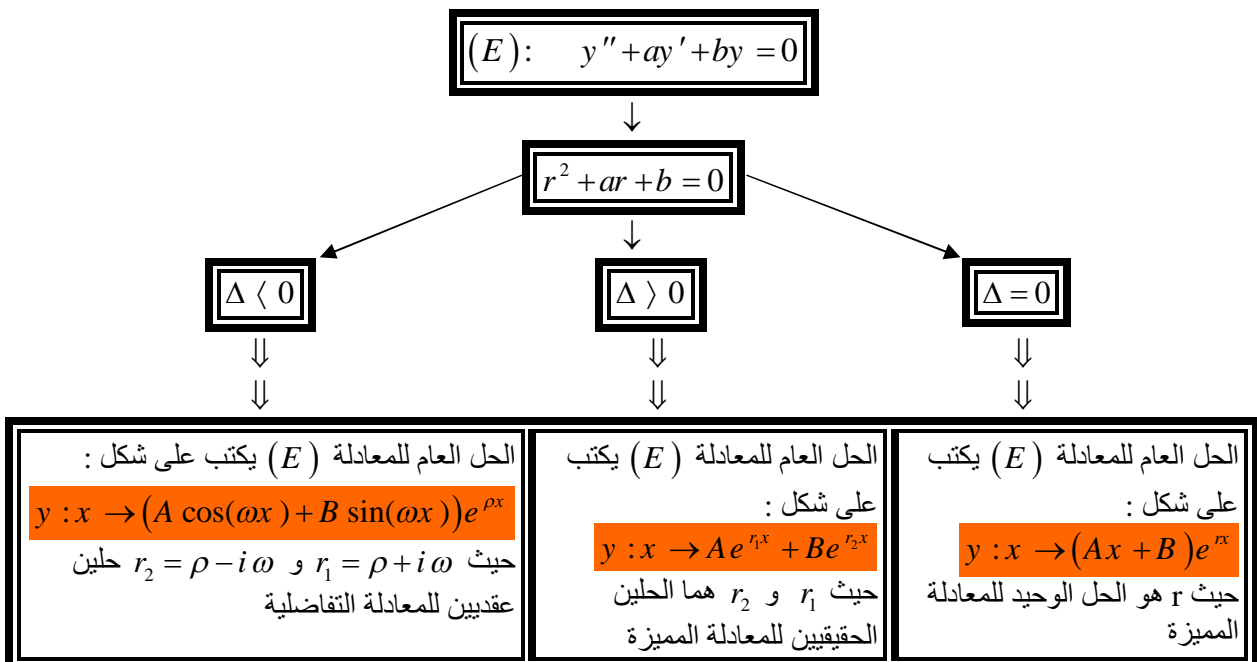
الجدول التالي يلخص الحالات الثلاثة المرتبطة بإشارة $\Delta = a^2 - 4b$ وكيفية تحديد الحل العام للمعادلة (E)

إشارة المميز Δ	حلول المعادلة المميزة	الحل العام للمعادلة (E)
$\Delta = 0$	المعادلة المميزة لها حل وحيد $r = \frac{-a}{2}$	الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل: $y : x \rightarrow (Ax + B)e^{rx}$
$\Delta > 0$	المعادلة المميزة لها حلين حقيقيين هما: $r_2 = \frac{-a + \sqrt{\Delta}}{2}$ و $r_1 = \frac{-a - \sqrt{\Delta}}{2}$	الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل: $y : x \rightarrow Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$
$\Delta < 0$	المعادلة المميزة لها حلين عقديين مترافقين يكتبان على شكلهما الجبري: $r_2 = \rho - i\omega$ و $r_1 = \rho + i\omega$	الحل العام للمعادلة (E) يكتب على شكل: $y : x \rightarrow (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))e^{\rho x}$

ملاحظة:

A و B ثابتان حقيقيتان تحددان بالشروط البدئية (أنظر الأمثلة)

يمكن تلخيص مضمون الجدول أعلاه في الخطاطة التالية و التي تبين أهم المراحل الضرورية والكافية لحل معادلة تفاضلية من النوع (E)



2 - أمثلة

مثال رقم 01:

لتكن (E) المعادلة التفاضلية التالية: $y'' - 2y' + 3y = 0$

حدد الحل العام لهذه المعادلة

الحل

المعادلة المميزة لهذه المعادلة التفاضلية هي: $r^2 - 2r + 3 = 0$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(3) = 4 - 12 = -8 = (i\sqrt{8})^2$$

لدينا $\Delta < 0$ اذن المعادلة المميزة لها حلين عقديين وهما:

$$r_2 = \frac{2+i\sqrt{8}}{2} = 1+i\sqrt{2} \quad \text{و} \quad r_1 = \frac{2-i\sqrt{8}}{2} = \frac{2-i2\sqrt{2}}{2} = 1-i\sqrt{2}$$

ومن هنا الحل العام للمعادلة (E) هو: $y : x \rightarrow (A \cos(\sqrt{2}x) + B \sin(\sqrt{2}x))e^x$

مثال رقم 02:

حدد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية $2y'' - 3y' - 2y = 0$ (E):

و الذي يحقق الشرطين البدئيين $y(0) = 1$ و $y'(0) = -1$

الحل

المعادلة المميزة للمعادلة (E) هي كما يلي: $2r^2 - 3r - 2 = 0$

$$\Delta = 3^2 - 4(2)(-2) = 9 + 16 = 25$$

لدينا $\Delta > 0$ اذن المعادلة المميزة لها حلين حقيقيين وهما:

$$r_2 = \frac{3+\sqrt{25}}{4} = 2 \quad \text{و} \quad r_1 = \frac{3-\sqrt{25}}{4} = \frac{-1}{2}$$

ومن هنا الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) هو: $y : x \rightarrow Ae^{\frac{-1}{2}x} + Be^{2x}$ حيث A و B ثابتان حقيقيتان تحددان

بالشروط البدئية: 1

لدينا:

$$y(0) = 1 \Leftrightarrow Ae^0 + Be^0 = 1$$

$$\Leftrightarrow A + B = 1$$

و لدينا

$$y'(0) = -1 \Leftrightarrow \frac{-1}{2}Ae^0 + 2Be^0 = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}A + 2B = -1$$

لدينا اذن النظمة التالية:

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ \frac{-1}{2}A + 2B = -1 \end{cases}$$

من السهل حل هذه النظمة ونحصل على $A = \frac{6}{5}$ و $B = \frac{-1}{5}$

ومن هنا الحل العام للمعادلة التفاضلية (E) و الذي يحقق الشرطين البدئيين $y(0) = 1$ و $y'(0) = -1$ هو:

$$y : x \rightarrow \frac{6}{5}e^{\frac{-1}{2}x} - \frac{1}{5}e^{2x}$$