

# الإشتقاق

## 1) اشتقاق دالة في عدد : تعاريف و تأويلات هندسية

$(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\leftrightarrow$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'(a)$	$\leftrightarrow$	$f$ قابلة للاشتقاق في $a$
$(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'_d(a)$ و معادلته : $y = f'_d(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\leftrightarrow$	$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'_d(a)$	$\leftrightarrow$	$f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين
$(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'_g(a)$ و معادلته : $y = f'_g(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\leftrightarrow$	$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l \in \mathbb{R}$ $l = f'_g(a)$	$\leftrightarrow$	$f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار
$(C_f)$ يقبل مماسا في النقطة $A(a, f(a))$ معامله الموجه $l = f'(a)$ و معادلته : $y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$	$\leftrightarrow$	$f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليمين ✓ $f$ قابلة للاشتقاق في $a$ على اليسار ✓ $f'_d(a) = f'_g(a) = f'(a)$ ✓	$\leftrightarrow$	$f$ قابلة للاشتقاق في $a$

- إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق في  $a$  على اليمين و  $f$  قابلة للاشتقاق في  $a$  على اليسار و  $f'_d(a) \neq f'_g(a)$  فإن  $f$  غير قابلة للاشتقاق في  $a$ . في هذه الحالة  $(C_f)$  يقبل نصفي مماس مختلفان في النقطة  $A(a, f(a))$  معاملاهما الموجهان  $f'_d(a)$  و  $f'_g(a)$  و النقطة  $A(a, f(a))$  تسمى نقطة مزوأة

- إذا كانت  $f'(a) = 0$  فإن  $(C_f)$  يقبل مماس أفقي في  $A(a, f(a))$

$f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ على اليسار ( $C_f$ ) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a, f(a))$	$f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ على اليمين ( $C_f$ ) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a, f(a))$
$f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ على اليسار ( $C_f$ ) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى في النقطة $A(a, f(a))$	$f$ غير قابلة للاشتقاق في $a$ $\Leftrightarrow \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ على اليمين ( $C_f$ ) يقبل نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل في النقطة $A(a, f(a))$

## (2) اشتقاق دالة على مجال

### خاصيات

<p>✓ إذا كانت <math>f</math> و <math>g</math> قابلتين للاشتقاق على <math>I</math> و <math>\alpha \in \mathbb{R}</math> فإن <math>\alpha f</math> و <math>f + g</math> و <math>f \times g</math> قابلة للاشتقاق على <math>I</math></p> <p>✓ بالإضافة إذا كانت <math>g \neq 0</math> على <math>I</math> فإن <math>\frac{f}{g}</math> و <math>\frac{1}{g}</math> قابلة للاشتقاق على <math>I</math></p> <p>✓ إذا كانت <math>f</math> قابلة للاشتقاق على <math>I</math> و <math>g</math> قابلة للاشتقاق على <math>I</math> فإن <math>f \circ g</math> قابلة للاشتقاق على <math>I</math></p> <p>✓ إذا كانت <math>f</math> قابلة للاشتقاق على <math>I</math> و <math>f \geq 0</math> على <math>I</math> فإن <math>\sqrt{f}</math> قابلة للاشتقاق على <math>I</math></p> <p>✓ إذا كانت <math>f</math> قابلة للاشتقاق على <math>I</math> فإن <math>f^n</math> ( <math>n \in \mathbb{N}</math> ) قابلة للاشتقاق على <math>I</math></p>
--

الدالة المشتقة	الدالة
$\alpha f'$	$\alpha f$
$f' + g'$	$f + g$
$f' \times g + f \times g'$	$f \times g$
$-\frac{g'}{g^2}$	$\frac{1}{g}$
$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	$\frac{f}{g}$
$f' \times g' \circ f$	$g \circ f$
$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$	$\sqrt{f}$
$nf' f^{n-1}$	$f^n$
$\frac{U'}{U}$	$\ln U $
$U'e^U$	$e^U$

❖ مشتقات الدوال الاعتيادية

المجال $I$	الدالة المشتقة $f'$	الدالة $f$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$x \mapsto k$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{N}^*$
$I = ]-\infty, 0[$ أو $I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \mapsto x^n \quad n \in \mathbb{Z}^* \setminus \{-1\}$
$I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto rx^{r-1}$	$x \mapsto x^r \quad r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$
$I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \mapsto \sqrt{x}$
$I = ]-\infty, 0[$ أو $I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{-1}{x^2}$	$x \mapsto \frac{1}{x}$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto \cos x$	$x \mapsto \sin x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto -\sin x$	$x \mapsto \cos x$
$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$x \mapsto \tan x$
$I = ]0, +\infty[$	$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto \ln x$
$\mathbb{R}$	$x \mapsto e^x$	$x \mapsto e^x$

خاصية : مشتقة الدالة العكسية :

لتكن  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  تقبل دالة عكسية  $f^{-1}$  وليكن  $x_0$  و  $y_0$  عدان بحيث :  $f^{-1}(x_0) = y_0$

إذا كانت  $f'(y_0) \neq 0$  فإن  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق في  $x_0$  ولدينا  $(f^{-1})'(x_0) = \frac{1}{f'(y_0)}$

إذا كانت  $f'$  لا تنعدم على  $I$  فإن  $f^{-1}$  قابلة للاشتقاق على  $f(I)$  ولدينا :

$$(\forall x \in f(I)) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

خاصية

❖ الدالة  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  قابلة للاشتقاق على  $]0, +\infty[$  ولدينا :  $(\forall x \in ]0, +\infty[) \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x}^{n-1}}$

❖ إذا كانت  $f$  قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  بحيث :  $f(x) > 0$  ( $\forall x \in I$ ) فإن الدالة  $\sqrt[n]{f}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  و

$$\text{لدينا : } (\sqrt[n]{f})' = \frac{f'}{n\sqrt[n]{f}^{n-1}}$$

رتابة دالة

- ✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$  فإن  $f$  تزايدية على  $I$   
✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$  فإن  $f$  تناقصية على  $I$   
✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) > 0$  فإن  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$   
✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) < 0$  فإن  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$

خاصية

- ✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \geq 0$  و كانت  $f'$  تنعدم في عدد منته من النقط على  $I$  فإن  $f$  تزايدية قطعاً على  $I$   
✓ إذا كانت  $\forall x \in I \quad f'(x) \leq 0$  و كانت  $f'$  تنعدم في عدد منته من النقط على  $I$  فإن  $f$  تناقصية قطعاً على  $I$